



**Resonance**<sup>®</sup>  
Educating for better tomorrow

**PRMO  
2019**

**NATIONAL BOARD FOR HIGHER MATHEMATICS  
AND  
HOMI BHABHA CENTRE FOR SCIENCE EDUCATION  
TATA INSTITUTE OF FUNDAMENTAL RESEARCH  
MATHEMATICS TEACHERS' ASSOCIATION  
MTA Pre-REGIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD (PRMO), 2019**

## **QUESTION PAPER WITH SOLUTION & ANSWER KEY**

**Date: 11<sup>th</sup> August, 2019 | Time: 10:00 AM to 1:00 PM**



**Anubhab Ghosal**  
Classroom Student Since XI  
Reso Roll No.: 18161397

**RESONite Bagged  
SILVER MEDAL  
in 60<sup>th</sup> International  
Mathematical Olympiad  
(IMO) 2019, Bath (UK)  
and made INDIA PROUD**



**FEW OF HIS OTHER  
ACHIEVEMENT ARE**

- Won Bronze Medal at APMO 2019
- NSEA Qualified 2019
- KVPY Scholar 2018-19

**To Know more:** sms **RESO** at **56677** | **E-mail:** [contact@resonance.ac.in](mailto:contact@resonance.ac.in) | **Website:** [www.resonance.ac.in](http://www.resonance.ac.in)

**Toll Free: 1800 258 5555**



[facebook.com/ResonanceEdu](https://www.facebook.com/ResonanceEdu)



[twitter.com/ResonanceEdu](https://twitter.com/ResonanceEdu)



[www.youtube.com/resowatch](https://www.youtube.com/resowatch)



[blog.resonance.ac.in](http://blog.resonance.ac.in)

**TOTAL SELECTIONS**

**5162**

1 or 2 Yearlong Classroom: **3473** | Distance Learning & e-Learning: **1689**  
Kota Classroom : **2245** | All Study Centres (Classroom): **1228**

**AIR 73**

**Ananjan Nandi**  
Classroom Student  
since Class XI



**AIR 80**

**Tamajit Banerjee**  
Classroom Student  
since Class XII

List of all our selected students is available on our official website

HIGHEST\*  
CLASSROOM GIRL  
STUDENTS SELECTED

**353**

HIGHEST\* CLASSROOM  
HINDI MEDIUM  
STUDENTS SELECTED

**277**

**AIR 168**

**KRITIN SHARMA**  
Classroom Student  
since class XI

**AIR 179**

**ATREYA GOSWAMI**  
Classroom Student  
since class XI

**AIR 192**

**SAPTARSHI DASGUPTA**  
Classroom Student  
since class XI

**AIR 127**

**SAHASRA RAN JAN**  
Classroom Student  
since class XII

**AIR 145**

**ANUBHAV KALYANI**  
Classroom Student  
since class XI

**AIR 161**

**ANGIKAR GHOSAL**  
Classroom Student  
since class XII

**AIR 212**

**ATUR GUPTA**  
Classroom Student  
since class VIII

**AIR 216**

**SHUBHANKAR**  
Classroom Student  
since class X

**AIR 225**

**AMAN GUPTA**  
Classroom Student  
since class IX

**AIR 237**

**KANISHK SINGHAL**  
Classroom Student  
since class VIII

**AIR 247**

**RUPINDER GOYAL**  
Classroom Student  
since class XI

**AIR 3**

**ANSHUL NAVPHULE**  
Classroom Student  
since class VII  
SC

**AIR 4**

**ATIN BAINADA**  
Classroom Student  
since class XI  
ST

**AIR 11**

**SAHASRA RAN JAN**  
Classroom Student  
since class XII  
OBC  
NCL

**AIR 21**

**SOUMIL SARAWGI**  
Classroom Student  
since class XI  
GEN  
EWS

**BEST RANKS IN CATEGORIES**

**Top 100 AIRs - Other Categories from Classroom Programs**

<b>Gen - EWS</b>	21, 22, 23, 37, 42, 43, 54, 90, 94
<b>OBC - NCL</b>	11, 34, 40, 56, 72, 73, 76
<b>SC</b>	3, 11, 30, 31, 36, 37, 53, 64, 72, 92, 94, 100
<b>ST</b>	4, 10, 13, 18, 21, 22, 30, 37, 43, 53, 68, 70, 74, 83, 89, 90, 91, 94

**Top 100 AIRs**  
Distance Learning Program

18	42	48	54
58	61	90	98

All from General Category

**JNV Bundi Result Highlight**

**HIGHEST\* SELECTION RATIO**  
amongst any JNV across India  
**84%** 84 students selected  
out of 100 students  
appeared

\*Based on the information collected from public domain till 17<sup>th</sup> June, 2019, 1:00 PM

## INSTRUCTION

**Number of Questions: 30**

**Max. Marks: 102**

1. Use of mobile phones, smartphones, iPads, calculators, programmable wrist watches is **STRICTLY PROHIBITED**. Only ordinary pens and pencils are allowed inside the examination hall.
2. The correction is done by machine through scanning. On OMR sheet, darken bubbles completely with a black pencil or a black blue pen. Darken the bubbles completely only after you are sure of your answer: else, erasing lead to the OMR sheet getting damaged and the machine may not be able to read the answer.
3. The name, email address and date of birth entered on the OMR sheet will be your login credentials for accessing your PROM score.
4. Incomplete /incorrectly and carelessly filled information may disqualify your candidature.
5. Each question has a one or two digit number as answer. The first diagram below shows improper and proper way of darkening the bubble with detailed instructions. The second diagram shows how to mark a 2-digit number and a 1-digit number.

**INSTRUCTIONS**

1. "Think before your ink".
2. Marking should be done with Blue/Black Ball Point Pen only.
3. Darken only one circle for each question as shown in Example Below.

<p><b>WRONG METHODS</b></p>	<p><b>CORRECT METHOD</b></p>
-----------------------------	------------------------------

4. If more than one circle is darkened or if the response is marked in any other way as shown "WRONG" above, it shall be treated as wrong way of marking.
5. Make the marks only in the spaces provided.
6. Carefully tear off the duplicate copy of the OMR without tampering the Original.
7. Please do not make any stray marks on the answer sheet.

<p><b>Q. 1</b></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">47</div>	<p><b>Q. 2</b></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">05</div>
--------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------

6. The answer you write on OMR sheet is irrelevant. The darkened bubble will be considered as your final answer.
7. Questions 1 to 6 carry 2 marks each: Questions 7 to 21 carry 3 marks each: Questions 22 to 30 carry 5 marks each.
8. All questions are compulsory.
9. There are no negative marks.
10. Do all rough work in the space provided below for it. You also have pages at the end of the question paper to continue with rough work.
11. After the exam, you may take away the Candidate's copy of the OMR sheet.
12. Preserve your copy of OMR sheet till the end of current Olympiad season. You will need it further for verification purposes.
13. You may take away the question paper after the examination.

### Resonance Eduventures Limited

REGISTERED & CORPORATE OFFICE: CG Tower, A-46 & 52, IPIA, Near City Mall, Jhalawar Road, Kota (Raj.)-324005  
Ph.No. : 0744-2777777, 0744-2777700 | Toll Free : 1800 258 5555 | FAX No. : +91-022-39167222 | To Know more : sms RESO at 56677

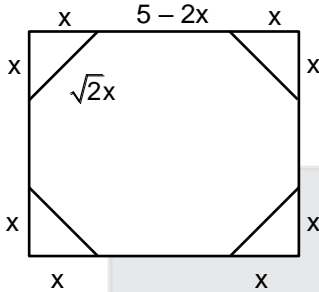
Website : [www.resonance.ac.in](http://www.resonance.ac.in) | E-mail : [contact@resonance.ac.in](mailto:contact@resonance.ac.in) | CIN : U80302RJ2007PLC024029

Toll Free : 1800 258 5555    73400 10333    facebook.com/ResonanceEdu    twitter.com/ResonanceEdu    www.youtube.com/resowatch    blog.resonance.ac.in

1. From a square with sides of length 5, triangular pieces from the four corners are removed to form a regular octagon. Find the area **removed** to the nearest integer?

एक वर्ग जिसकी भुजाओं की लम्बाई 5 है, उसके चारों कोनों से त्रिभुजाकार टुकड़े काट कर एक नियमित अष्टभुज बनाया जाता है। कितना क्षेत्रफल हटाया गया है, उसका मान सबसे करीबी पूर्णांक तक ज्ञात करो।

Sol. (4)



$$5 - 2x = \sqrt{2}x \Rightarrow x = \frac{5}{2 + \sqrt{2}}$$

$$\text{Area removed हटाया गया क्षेत्रफल} = 2x^2 = \frac{2 \times 25}{2(\sqrt{2} + 1)} = 25(\sqrt{2} - 1)^2 \approx 4.3$$

So area removed to nearest integer is 4

हटाया गया क्षेत्रफल के सबसे करीबी पूर्णांक 4 है।

2. Let  $f(x) = x^2 + ax + b$ . If for all nonzero real  $x$

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$$

and the roots of  $f(x) = 0$  are integers, what is the value of  $a^2 + b^2$ ?

मान लो कि  $f(x) = x^2 + ax + b$  है। यदि सभी अशून्य वास्तविक संख्या  $x$  के लिए

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$$

और  $f(x) = 0$  के सभी हल पूर्णांक हैं, तो  $a^2 + b^2$  का मान क्या है?

Sol. (13)

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b = x^2 + ax + b + \frac{1}{x^2} + \frac{a}{x} + b$$

$$\Rightarrow b = 2$$

$$\Rightarrow a\beta = 2 \quad \Rightarrow (\alpha, \beta) = (1, 2) \text{ or } (-1, -2)$$

$$\Rightarrow a = 3 \text{ or } -3 \quad \Rightarrow a^2 + b^2 = 9 + 4 = 13$$

## Resonance Eduventures Limited

REGISTERED & CORPORATE OFFICE: CG Tower, A-46 & 52, IPIA, Near City Mall, Jhalawar Road, Kota (Raj.)-324005

Ph.No. : 0744-2777777, 0744-2777700 | Toll Free : 1800 258 5555 | FAX No. : +91-022-39167222 | To Know more : sms RESO at 56677

Website : [www.resonance.ac.in](http://www.resonance.ac.in) | E-mail : [contact@resonance.ac.in](mailto:contact@resonance.ac.in) | CIN : U80302RJ2007PLC024029

Toll Free : 1800 258 5555 73400 10333

[facebook.com/ResonanceEdu](https://www.facebook.com/ResonanceEdu)

[twitter.com/ResonanceEdu](https://twitter.com/ResonanceEdu)

[www.youtube.com/resowatch](https://www.youtube.com/resowatch)

[blog.resonance.ac.in](http://blog.resonance.ac.in)



3. Let  $x_1$  be a positive real number and for every integer  $n \geq 1$  let  $x_{n+1} = 1 + x_1 x_2 \dots x_n x_n$ . If  $x_5 = 43$ , what is the sum of digits of the largest prime factor of  $x_6$ ?

मान लो कि  $x_1$  एक धनात्मक वास्तविक संख्या है और सभी  $n \geq 1$  पूर्णाकों के लिए  $x_{n+1} = 1 + x_1 x_2 \dots x_n x_n$  है। अगर  $x_5 = 43$  तो  $x_6$  के सबसे बड़े अभाज्य गुणखंड के अंकों (digits) का योग ज्ञात करो।

Sol. (13)

$$x_5 = 1 + x_1 x_2 x_3 x_4 \Rightarrow x_1 x_2 x_3 x_4 = 42$$

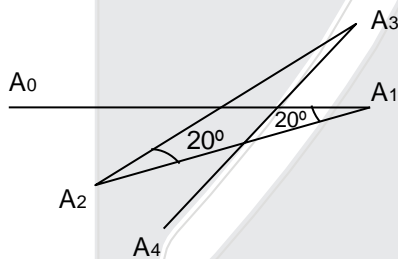
$$x_6 = 1 + x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 = 1 + (42)(43) = 1807 = 13 \times 139$$

$\Rightarrow$  largest prime factor सबसे बड़ा अभाज्य गुणखंड = 139  $\Rightarrow$  sum of digits अंकों का योग = 13

4. An ant leaves the anthill for its morning exercise. It walks 4 feet east and then makes a  $160^\circ$  turn to the right and walks 4 more feet. It then makes another  $160^\circ$  turn to the right and walks 4 more feet. If the ant continues this pattern until it reaches the anthill again, what is the distance in feet it would have walked?

एक चींटी अपनी बांभी से सुबह के व्यायाम के लिए निकलती है। वह 4 फुट पूरब की ओर चलती है, फिर  $160^\circ$  दाँएँ ओर मुड़ कर 4 फुट और चलती है। फिर वह एक बार और  $160^\circ$  दाँएँ ओर मुड़ कर 4 फुट चलती है। अगर चींटी इसी क्रम में चलती रहती तो वापिस अपनी बांभी तक पहुंचने में उसने कुल कितनी दूरी (फुट में) चली होती?

Sol. (36)



Let  $A_0 (0,0)$

$A_1 (4\cos 0, 4\sin 0)$

$A_2 (4\cos 0 + 4\cos 160, 4\sin 0 + 4\sin 160)$

$A_n = (0,0)$

$$\Rightarrow 4(\cos 0 + \cos 160 + \dots + \cos 160(n-1)) = 0 \text{ and } 4(\sin 0 + \sin 160 + \dots + \sin 160(n-1)) = 0$$

$$\Rightarrow \sin(80n) = 0$$

$$\Rightarrow n = 9$$

$$\Rightarrow \text{distance covered} = 4 \times 9 = 36 \text{ feet}$$

## Resonance Eduventures Limited

REGISTERED & CORPORATE OFFICE: CG Tower, A-46 & 52, IPIA, Near City Mall, Jhalawar Road, Kota (Raj.)-324005

Ph.No. : 0744-2777777, 0744-2777700 | Toll Free : 1800 258 5555 | FAX No. : +91-022-39167222 | To Know more : sms RESO at 56677

Website : [www.resonance.ac.in](http://www.resonance.ac.in) | E-mail : [contact@resonance.ac.in](mailto:contact@resonance.ac.in) | CIN : U80302RJ2007PLC024029

Toll Free : 1800 258 5555

73400 10333

[facebook.com/ResonanceEdu](https://www.facebook.com/ResonanceEdu)

[twitter.com/ResonanceEdu](https://twitter.com/ResonanceEdu)

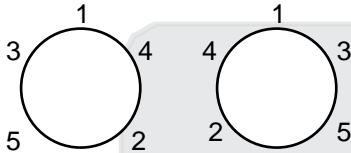
[www.youtube.com/resowatch](https://www.youtube.com/resowatch)

[blog.resonance.ac.in](http://blog.resonance.ac.in)

5. Five persons wearing badges with numbers 1, 2, 3, 4, 5 are seated on 5 chairs around a circular table. In how many ways can they be seated so that no two persons whose badges have consecutive numbers are seated next to each other? (Two arrangements obtained by rotation around the table are considered different.)

पाँच बिल्ले, जिन पर 1, 2, 3, 4, 5 लिखा है, पहने हुए पाँच लोग एक गोल मेज के चारों तरफ पाँच कुर्सियों पर बैठे हैं। वह ऐसी कितनी तरह से बैठ सकते हैं, जिससे कि कोई भी दो लोग जिनके बिल्ले पर लिखी संख्याएँ क्रमागत हों, वह अगल-बगल ना बैठे हों? (एक बैठने का तरीका जो किसी दूसरे तरीके को घुमा देने से मिलता हो, उसे दूसरे तरीके से भिन्न माना जाएगा।)

Sol. (10)



two ways and 5 arrangements =  $2 \times 5 = 10$

दो तरीके व पाँच क्रमचय =  $2 \times 5 = 10$

6. Let  $\overline{abc}$  be a three digit number with nonzero digits such that  $a^2 + b^2 = c^2$ . What is the largest possible prime factor of  $\overline{abc}$ ?

मान लो कि  $\overline{abc}$  तीन अंकों की ऐसी संख्या है, जिसके अंक अशून्य हैं व  $a^2 + b^2 = c^2$  है।  $\overline{abc}$  का सबसे बड़ा अभाज्य गुणनखण्ड क्या संभव है?

Sol. (29)

a, b, c form Pythagoras triplet

$\Rightarrow abc = 345$  or  $435$

$345 = 3 \times 5 \times 23$  and  $435 = 5 \times 3 \times 29$

$\Rightarrow$  Largest possible prime factor = 29

a, b, c पाइथागोरस त्रिक बनाते हैं

$\Rightarrow abc = 345$  or  $435$

$345 = 3 \times 5 \times 23$  और  $435 = 5 \times 3 \times 29$

$\Rightarrow$  अधिकतम संभावित अभाज्य गुणनखण्ड = 29

7. On a clock, there are two instants between 12 noon and 1 PM, when the hour hand and the minute hand are at right angles. The difference in minutes between these two instants is written as  $a + \frac{b}{c}$ ,

where a, b, c are positive integers, with  $b < c$  and  $b/c$  in the reduced form. What is the value of  $a + b + c$ ?

एक घड़ी में दोपहर 12 बजे और दोपहर 1 बजे के बीच में दो बार ऐसा होता है जब घंटे की सूई और मिनट की

सूई एक दूसरे के लम्ब होती है। इन दो समय के बीच में मिनटों में अंतर  $a + \frac{b}{c}$  की तरह लिखें, जहाँ a, b, c

धनात्मक पूर्णांक हैं,  $b < c$  व  $b/c$  भिन्न का न्यूनतम रूप (reduced form या simplest form) है।  $a + b + c$  का मान क्या है?

## Resonance Eduventures Limited

REGISTERED & CORPORATE OFFICE: CG Tower, A-46 & 52, IPIA, Near City Mall, Jhalawar Road, Kota (Raj.)-324005

Ph.No. : 0744-2777777, 0744-2777700 | Toll Free : 1800 258 5555 | FAX No. : +91-022-39167222 | To Know more : sms RESO at 56677

Website : [www.resonance.ac.in](http://www.resonance.ac.in) | E-mail : [contact@resonance.ac.in](mailto:contact@resonance.ac.in) | CIN : U80302RJ2007PLC024029

Toll Free : 1800 258 5555

73400 10333

[facebook.com/ResonanceEdu](https://www.facebook.com/ResonanceEdu)

[twitter.com/ResonanceEdu](https://twitter.com/ResonanceEdu)

[www.youtube.com/resowatch](https://www.youtube.com/resowatch)

[blog.resonance.ac.in](http://blog.resonance.ac.in)

Sol. (51)

Minute hand covers  $6^\circ$  in one minute and hour hand covers  $\frac{1}{2}^\circ$  in one minute

Let instant is  $x$  minutes past 12

$$\Rightarrow 6x - \frac{x}{2} = 90 \text{ or } 270 \Rightarrow x = 16\frac{4}{11} \text{ or } 49\frac{1}{11}$$

$$\text{Difference} = 32\frac{8}{11} \Rightarrow a + b + c = 32 + 8 + 11 = 51$$

मिनट की सुई एक मिनट में  $6^\circ$  बनाती है तथा घंटे की सुई एक मिनट में  $\frac{1}{2}^\circ$  कोण बनाती है।

माना  $x$  उस क्षण 12 आगे है

$$\Rightarrow 6x - \frac{x}{2} = 90 \text{ or } 270 \Rightarrow x = 16\frac{4}{11} \text{ or } 49\frac{1}{11}$$

$$\text{अन्तर} = 32\frac{8}{11} \Rightarrow a + b + c = 32 + 8 + 11 = 51$$

8. How many positive integers  $n$  are there such that  $3 \leq n \leq 100$  and  $x^{2^n} + x + 1$  is divisible by  $x^2 + x + 1$  ?

ऐसे कितने धनात्मक पूर्णांक  $n$  हैं जिनके लिए  $3 \leq n \leq 100$  व  $x^{2^n} + x + 1$  संख्या  $x^2 + x + 1$  से भाज्य है?

Sol. (49)

Since  $\omega$  and  $\omega^2$  are factors of  $x^2 + x + 1$  ; so  $\omega$  and  $\omega^2$  will be factors of  $x^{2^n} + x + 1$

$\Rightarrow 2^n$  must be of the form  $3k + 2$  ;  $k \in I$ . For this to happen,  $n$  must be odd.

So  $n = \{3, 5, 7, \dots, 99\}$

Number of such numbers = 49

चूंकि  $\omega$  तथा  $\omega^2$ ,  $x^2 + x + 1$  के गुणनखण्ड है ; इसलिए  $\omega$  और  $\omega^2$ ,  $x^{2^n} + x + 1$  के भी गुणनखण्ड होंगे

$\Rightarrow 2^n$  का रूप  $3k + 2$  ;  $k \in I$  होगा. इसके लिए  $n$  विषम होगा

इसलिए  $n = \{3, 5, 7, \dots, 99\}$

इस प्रकार संख्याओं की संख्याएँ = 49

9. Let the rational number  $p/q$  be closest to but not equal to  $22/7$  among all rational numbers with denominator  $< 100$ . What is the value of  $p - 3q$ ?

मान लो कि  $p/q$  ऐसा भिन्न है जो ऐसे भिन्न जिनका हर (denominator)  $< 100$  हो और जो  $22/7$  से अलग हों, उनमें  $22/7$  के सबसे करीब पड़ता है। तो  $p - 3q$  का मान क्या होगा?

Sol. (14)

We have to have  $\left| \frac{22}{7} - \frac{p}{q} \right|$  to be as small as possible for  $q < 100$ .

$$\left| \frac{22}{7} - \frac{p}{q} \right| = \left| \frac{22q - 7p}{7q} \right| \text{ should be smallest.}$$

$$\Rightarrow |22q - 7p| = 1$$

$$\text{and } q = 99$$

## Resonance Eduventures Limited

REGISTERED & CORPORATE OFFICE: CG Tower, A-46 & 52, IPIA, Near City Mall, Jhalawar Road, Kota (Raj.)-324005

Ph.No. : 0744-2777777, 0744-2777700 | Toll Free : 1800 258 5555 | FAX No. : +91-022-39167222 | To Know more : sms RESO at 56677

Website : [www.resonance.ac.in](http://www.resonance.ac.in) | E-mail : [contact@resonance.ac.in](mailto:contact@resonance.ac.in) | CIN : U80302RJ2007PLC024029

Toll Free : 1800 258 5555

73400 10333

[facebook.com/ResonanceEdu](https://www.facebook.com/ResonanceEdu)

[twitter.com/ResonanceEdu](https://twitter.com/ResonanceEdu)

[www.youtube.com/resowatch](https://www.youtube.com/resowatch)

[blog.resonance.ac.in](http://blog.resonance.ac.in)

$$\Rightarrow p = 311$$

$$p - 3q = 311 - 3 \times 99 = 311 - 297 = 14$$

यहाँ  $\left| \frac{22}{7} - \frac{p}{q} \right|$  छोटे से छोटा सम्भव होगा  $q < 100$  के लिए

$$\left| \frac{22}{7} - \frac{p}{q} \right| = \left| \frac{22q - 7p}{7q} \right| \text{ न्यूनतम होगा}$$

$$\Rightarrow |22q - 7p| = 1$$

$$\text{और } q = 99$$

$$\Rightarrow p = 311$$

$$p - 3q = 311 - 3 \times 99 = 311 - 297 = 14$$

10. Let ABC be a triangle and let  $\Omega$  be its circumcircle. The internal bisectors of angles A, B and C intersect  $\Omega$  at  $A_1, B_1$  and  $C_1$  respectively and the internal bisectors of angles  $A_1, B_1$  and  $C_1$  of the triangle  $A_1B_1C_1$  intersect  $\Omega$  at  $A_2, B_2$  and  $C_2$ , respectively. If the smallest angle of triangle ABC is  $40^\circ$ , what is the magnitude of the smallest angle of triangle  $A_2B_2C_2$  in degrees?

मान लो कि ABC एक त्रिभुज है और  $\Omega$  उसका बहिर्वृत्त है। कोण A, B व C के अन्तःसमद्विभाजक  $\Omega$  से क्रमशः  $A_1, B_1$  व  $C_1$  में मिलते हैं और त्रिभुज  $A_1B_1C_1$  के कोण  $A_1, B_1$  व  $C_1$  के अन्तःसमद्विभाजक  $\Omega$  से क्रमशः  $A_2, B_2$  व  $C_2$ , से मिलते हैं। अगर त्रिभुज ABC का सबसे छोटा कोण  $40^\circ$  है तो त्रिभुज  $A_2B_2C_2$  के सबसे छोटे कोण का मान (degree) में क्या होगा?

Sol. (55)

$$\angle A_1B_1C_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle ABC}{2}$$

$$\angle A_1C_1B_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle ACB}{2}$$

$$\angle B_1A_1C_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle BAC}{2}$$

$$\angle A_2B_2C_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\left( \frac{\pi}{2} - \frac{\angle ABC}{2} \right)}{2}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{\angle ABC}{4}$$

similarly इसी प्रकार  $\angle A_2C_2B_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\angle ACB}{4}$

and और  $\angle B_2A_2C_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\angle BAC}{4}$

$$\Rightarrow \text{smaller angle of } \Delta A_2 B_2 C_2 \text{ is } 45^\circ + \left( \frac{40^\circ}{4} \right) = 55^\circ$$

$$\Rightarrow \Delta A_2 B_2 C_2 \text{ का सबसे छोटा कोण } 45^\circ + \left( \frac{40^\circ}{4} \right) = 55^\circ$$

## Resonance Eduventures Limited

REGISTERED & CORPORATE OFFICE: CG Tower, A-46 & 52, IPIA, Near City Mall, Jhalawar Road, Kota (Raj.)-324005  
Ph.No. : 0744-2777777, 0744-2777700 | Toll Free : 1800 258 5555 | FAX No. : +91-022-39167222 | To Know more : sms RESO at 56677

Website : [www.resonance.ac.in](http://www.resonance.ac.in) | E-mail : [contact@resonance.ac.in](mailto:contact@resonance.ac.in) | CIN : U80302RJ2007PLC024029

Toll Free : 1800 258 5555 | 73400 10333 | [facebook.com/ResonanceEdu](https://www.facebook.com/ResonanceEdu) | [twitter.com/ResonanceEdu](https://twitter.com/ResonanceEdu) | [www.youtube.com/resowatch](https://www.youtube.com/resowatch) | [blog.resonance.ac.in](http://blog.resonance.ac.in)



11. How many distinct triangles ABC are there, up to similarity, such that the magnitudes of angles A, B and C in degrees are positive integers and satisfy

$$\cos A \cos B + \sin A \sin B \sin kC = 1$$

for some positive integer k, where  $kC$  does not exceed  $360^\circ$ ?

ऐसे कितने अलग-अलग (मतलब असमरूप) त्रिभुज ABC हैं जिनमें कोण A, B व C का डिग्री में मान धनात्मक पूर्णांक है, और जो

$$\cos A \cos B + \sin A \sin B \sin kC = 1$$

समीकरण को किसी धनात्मक पूर्णांक k के लिए संतुष्ट करते हैं  $kC$  का मान  $360^\circ$  से ज्यादा नहीं है ?

Sol. (6)

$$\cos A \cos B + \sin A \sin B \sin kC = 1$$

$$\Rightarrow \cos A \cos B + \sin A \sin B + \sin A \sin B \sin kC - \sin A \sin B = 1$$

$$\Rightarrow \sin A \sin B (\sin kC - 1) = 1 - \cos(A - B)$$

$$\text{So } (\sin kC - 1) = 0 \text{ and } \cos(A - B) = 1$$

$$\Rightarrow kC = 90^\circ \text{ and } A = B$$

Number of factors of  $90^\circ$

$$90 = 2 \times 3^2 \times 5$$

$$\text{Number of factors} = 2 \times 3 \times 2 = 12$$

for 6 factor A, B are integers

$$\cos A \cos B + \sin A \sin B \sin kC = 1$$

$$\Rightarrow \cos A \cos B + \sin A \sin B + \sin A \sin B \sin kC - \sin A \sin B = 1$$

$$\Rightarrow \sin A \sin B (\sin kC - 1) = 1 - \cos(A - B)$$

इसलिए  $(\sin kC - 1) = 0$  और  $\cos(A - B) = 1$

$$\Rightarrow kC = 90^\circ \text{ और } A = B$$

$90^\circ$  के गुणखण्डों की संख्या

$$90 = 2 \times 3^2 \times 5$$

$$\text{गुणखण्डों की संख्या} = 2 \times 3 \times 2 = 12$$

12. A natural number  $k > 1$  is called good if there exist natural numbers

$$a_1 < a_2 < \dots < a_k$$

such that 
$$\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_k}} = 1$$

Let  $f(n)$  be the sum of the first  $n$  good numbers,  $n \geq 1$ . Find the sum of all values of  $n$  for which  $f(n+5)/f(n)$  is an integer.

किसी प्राकृतिक संख्या  $k > 1$  को हम अच्छा कहेंगे अगर ऐसी प्राकृतिक संख्याएँ

$$a_1 < a_2 < \dots < a_k$$

मौजूद हों जिससे कि

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_k}} = 1$$

हो। मान लो कि  $n \geq 1$  के लिए  $f(n)$  पहली  $n$  अच्छी संख्याओं का योग है। ऐसी सभी संख्याओं  $n$  का योग ज्ञात करो जिनके लिए  $f(n+5)/f(n)$  एक पूर्णांक है।

## Resonance Eduventures Limited

REGISTERED & CORPORATE OFFICE: CG Tower, A-46 & 52, IPIA, Near City Mall, Jhalawar Road, Kota (Raj.)-324005

Ph.No. : 0744-2777777, 0744-2777700 | Toll Free : 1800 258 5555 | FAX No. : +91-022-39167222 | To Know more : sms RESO at 56677

Website : [www.resonance.ac.in](http://www.resonance.ac.in) | E-mail : [contact@resonance.ac.in](mailto:contact@resonance.ac.in) | CIN : U80302RJ2007PLC024029

Toll Free : 1800 258 5555

73400 10333

[facebook.com/ResonanceEdu](https://www.facebook.com/ResonanceEdu)

[twitter.com/ResonanceEdu](https://twitter.com/ResonanceEdu)

[www.youtube.com/resowatch](https://www.youtube.com/resowatch)

[blog.resonance.ac.in](http://blog.resonance.ac.in)

Ans (18)

Sol.

Let  $a_1 = A_1^2, a_2 = A_2^2, \dots, a_k = A_k^2$

we have to check if it is possible for distinct natural number  $A_1, A_2, \dots, A_k$  to satisfy,

$$\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} + \dots + \frac{1}{A_k} = 1$$

For  $k = 2$ ; it is obvious that there do not exist distinct  $A_1, A_2$ , such that  $\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} = 1 \Rightarrow 2$  is not a good number.

For  $k = 3$ ; we have  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1 \Rightarrow 3$  is a good number.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) = 1 \Rightarrow 4 \text{ is a good number.}$$

$k$  will be a good numbers for all  $k \geq 3$

$$f(n) = 3 + 4 + \dots n \text{ terms} = \frac{n(n+5)}{2}; f(n+5) = \frac{(n+5)(n+10)}{2}$$

$$\frac{f(n+5)}{f(n)} = \frac{n+10}{n} = 1 + \frac{10}{n}$$

Which will be integer for  $n = 1, 2, 5$  and  $10$

$$\text{sum} = 1 + 2 + 5 + 10 = 18.$$

माना  $a_1 = A_1^2, a_2 = A_2^2, \dots, a_k = A_k^2$

यह जाँच करना है कि यह भिन्न प्राकृत संख्याओं  $A_1, A_2, \dots, A_k$  के लिए संतुष्ट करेगा

$$\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} + \dots + \frac{1}{A_k} = 1$$

$k = 2$  के लिए यह स्पष्ट है कि यह  $A_1, A_2$  भिन्न संख्याओं के लिए विद्यमान नहीं है  $\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} = 1 \Rightarrow 2$  अच्छी संख्या नहीं है।

$k = 3$  के लिए  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1 \Rightarrow 3$  अच्छी संख्या है

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) = 1 \Rightarrow 4 \text{ अच्छी संख्या है।}$$

$$f(n) = \frac{n(n+5)}{2}; f(n+5) = \frac{(n+5)(n+10)}{2}$$

$$\frac{f(n+5)}{f(n)} = \frac{n+10}{n} = 1 + \frac{10}{n}$$

जो कि  $n = 1, 2, 5$  और  $10$  के लिए पूर्णांक है

$$\text{योगफल} = 1 + 2 + 5 + 10 = 18.$$

## Resonance Eduventures Limited

REGISTERED & CORPORATE OFFICE: CG Tower, A-46 & 52, IPIA, Near City Mall, Jhalawar Road, Kota (Raj.)-324005

Ph.No. : 0744-2777777, 0744-2777700 | Toll Free : 1800 258 5555 | FAX No. : +91-022-39167222 | To Know more : sms RESO at 56677

Website : [www.resonance.ac.in](http://www.resonance.ac.in) | E-mail : [contact@resonance.ac.in](mailto:contact@resonance.ac.in) | CIN : U80302RJ2007PLC024029

Toll Free : 1800 258 5555

73400 10333

[facebook.com/ResonanceEdu](https://www.facebook.com/ResonanceEdu)

[twitter.com/ResonanceEdu](https://twitter.com/ResonanceEdu)

[www.youtube.com/resowatch](https://www.youtube.com/resowatch)

[blog.resonance.ac.in](http://blog.resonance.ac.in)

13. Each of the numbers  $x_1, x_2, \dots, x_{101}$  is  $\pm 1$ . What is the smallest positive value of  $\sum_{1 \leq i < j \leq 101} x_i x_j$  ?

$x_1, x_2, \dots, x_{101}$  में हर एक संख्या  $\pm 1$  है।  $\sum_{1 \leq i < j \leq 101} x_i x_j$  का न्यूनतम धनात्मक मान क्या है ?

Sol. (10)

$$\text{Let } S = \sum_{1 \leq i < j \leq 101} x_i x_j$$

We have

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{101})^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_{101}^2 + 2S$$

$$\Rightarrow 2S = \left( \sum_{i=1}^{101} x_i \right)^2 - \sum_{i=1}^{101} x_i^2$$

Since we have  $x_i = \pm 1$ , So  $x_i^2 = 1$

$$\text{So } 2S = \left( \sum_{i=1}^{101} x_i \right)^2 - 101$$

Since  $\sum_{i=1}^{101} x_i$  will be an integer

So  $\left( \sum_{i=1}^{101} x_i \right)^2$  will be a perfect square.

For smallest positive  $S$ ;  $\left( \sum_{i=1}^{101} x_i \right)^2$  must be the smallest perfect square greater than 101.

$$\text{So } \left( \sum_{i=1}^{101} x_i \right)^2 = 121$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{101} x_i = 11 \text{ or } -11$$

We can verify that the desired sum can be achieved by putting 45  $x_i$ 's to be  $-1$  and 56  $x_i$ 's to be 1

$$\text{So, } 2S = 121 - 101 = 20$$

$$\Rightarrow S = 10$$

$$\text{माना } S = \sum_{1 \leq i < j \leq 101} x_i x_j$$

यहाँ

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{101})^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_{101}^2 + 2S$$

$$\Rightarrow 2S = \left( \sum_{i=1}^{101} x_i \right)^2 - \sum_{i=1}^{101} x_i^2$$

चूँकि  $x_i = \pm 1$ , इसलिए  $x_i^2 = 1$

$$\text{इसलिए } 2S = \left( \sum_{i=1}^{101} x_i \right)^2 - 101$$

चूँकि  $\sum_{i=1}^{101} x_i$  पूर्णांक होगा

## Resonance Eduventures Limited

REGISTERED & CORPORATE OFFICE: CG Tower, A-46 & 52, IPIA, Near City Mall, Jhalawar Road, Kota (Raj.)-324005

Ph.No. : 0744-2777777, 0744-2777700 | Toll Free : 1800 258 5555 | FAX No. : +91-022-39167222 | To Know more : sms RESO at 56677

Website : [www.resonance.ac.in](http://www.resonance.ac.in) | E-mail : [contact@resonance.ac.in](mailto:contact@resonance.ac.in) | CIN : U80302RJ2007PLC024029

Toll Free : 1800 258 5555

73400 10333

[facebook.com/ResonanceEdu](https://www.facebook.com/ResonanceEdu)

[twitter.com/ResonanceEdu](https://twitter.com/ResonanceEdu)

[www.youtube.com/resowatch](https://www.youtube.com/resowatch)

[blog.resonance.ac.in](http://blog.resonance.ac.in)

इसलिए  $\left(\sum_{i=1}^{101} x_i\right)^2$  पूर्ण वर्ग होगा

न्यूनतम घनात्मक S के लिए ;  $\left(\sum_{i=1}^{101} x_i\right)^2$  , 101 से बड़ी सबसे छोटी पूर्ण वर्ग संख्या होगी

$$\text{इसलिए } \left(\sum_{i=1}^{101} x_i\right)^2 = 121$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{101} x_i = 11 \text{ or } -11$$

यह असानी से ज्ञात किया जा सकता है अभीष्ट योगफल को 45  $x_i$ 's, -1 हो और 56  $x_i$ 's, 1 हो

$$\text{इसलिए, } 2S = 121 - 101 = 20$$

$$\Rightarrow S = 10$$

14. Find the smallest positive integer  $n \geq 10$  such that  $n + 6$  is a prime and  $9n + 7$  is a perfect square.  
ऐसा सबसे छोटा घनात्मक पूर्णांक  $n \geq 10$  ज्ञात करो जहाँ  $n + 6$  अभाज्य हो और  $9n + 7$  एक पूर्ण वर्ग हो।

Sol. (53)

Since  $9n + 7$  is a perfect square

Let us assume that  $9n + 7 = m^2$

Also  $n + 6$  is a prime number  $\Rightarrow n + 6$  must be odd number

$\Rightarrow n$  also must be an odd number

So Let us assume  $n = 2k + 1$  .....(ii) where  $k$  is an Integer

$$9(2k + 1) + 7 = m^2$$

$$\Rightarrow 18k = m^2 - 16$$

$$\Rightarrow 18k = (m + 4)(m - 4) \quad \dots\text{.....(iii)}$$

Since  $18k$  is even and  $m+4$  and  $m-4$  both are of some parity  $\Rightarrow m$  must also be even.

say  $m = 2p$ , where  $p$  is an Integer

Substituting in (iii)

$$18k = (2p + 4)(2p - 4) = 4(p + 2)(p - 2)$$

$$\Rightarrow 9k = 2(p + 2)(p - 2)$$

$\Rightarrow k$  must be even, say  $k = 2\ell$  where  $\ell$  is an Integer

$$18\ell = 2(p + 2)(p - 2)$$

$$\Rightarrow 9\ell = (p + 2)(p - 2)$$

$\Rightarrow p$  must be of the form  $9q + 2$  or  $9q - 2$ , where  $q$  is an Integer

$$\text{First take } p = 9q - 2 \Rightarrow m = 2(9q - 2)$$

$$\text{Take } q = 1, m = 2 \times 7 = 14 \Rightarrow m^2 = 196$$

$$9n + 7 = 196 \Rightarrow 9n = 189 \Rightarrow n = 21$$

$\Rightarrow n + 6 = 27$  which is not prime

$$\text{Next take } p = 9q + 2 \Rightarrow m = 2(9q + 2)$$

$$\text{Take } q = 1 \Rightarrow m = 2 \times 11 = 22 \Rightarrow m^2 = 484$$

$$9n + 7 = 484 \Rightarrow 9n = 477 \Rightarrow n = 53$$

## Resonance Eduventures Limited

REGISTERED & CORPORATE OFFICE: CG Tower, A-46 & 52, IPIA, Near City Mall, Jhalawar Road, Kota (Raj.)-324005

Ph.No. : 0744-2777777, 0744-2777700 | Toll Free : 1800 258 5555 | FAX No. : +91-022-39167222 | To Know more : sms RESO at 56677

Website : [www.resonance.ac.in](http://www.resonance.ac.in) | E-mail : [contact@resonance.ac.in](mailto:contact@resonance.ac.in) | CIN : U80302RJ2007PLC024029

Toll Free : 1800 258 5555

73400 10333

[facebook.com/ResonanceEdu](https://www.facebook.com/ResonanceEdu)

[twitter.com/ResonanceEdu](https://twitter.com/ResonanceEdu)

[www.youtube.com/resowatch](https://www.youtube.com/resowatch)

[blog.resonance.ac.in](http://blog.resonance.ac.in)

$\Rightarrow n + 6 = 59$  which is a prime  
So  $n = 53$  is the smallest such number

चूंकि  $9n + 7$  एक पूर्ण वर्ग है

माना कि  $9n + 7 = m^2$  .....(i) जहां  $m$  एक पूर्णांक है तथा

$n + 6$  एक अभाज्य संख्या है धनात्मक पूर्णांक  $\geq 10$  के लिए  $\Rightarrow n + 6$  विषम संख्या होगी

$\Rightarrow n$  भी विषम संख्या होगी

इसलिए माना कि  $n = 2k + 1$  .....(ii) जहां  $k$  एक पूर्णांक है

$$9(2k + 1) + 7 = m^2$$

$$\Rightarrow 18k = m^2 - 16$$

$$\Rightarrow 18k = (m + 4)(m - 4) \dots\dots(iii)$$

चूंकि  $18k$  सम है तथा  $m+4$  और  $m-4$  दोनों एक ही प्रकार के हैं  $\Rightarrow m$  सम होगा

माना कि  $m = 2p$ , जहां  $p$  एक पूर्णांक है

(iii) में रखने पर

$$18k = (2p + 4)(2p - 4) = 4(p + 2)(p - 2)$$

$$\Rightarrow 9k = 2(p + 2)(p - 2)$$

$\Rightarrow k$  सम होगा माना कि  $k = 2l$  जहां  $l$  पूर्णांक है

$$18l = 2(p + 2)(p - 2)$$

$$\Rightarrow 9l = (p + 2)(p - 2)$$

$\Rightarrow p$  का रूप  $9q + 2$  या  $9q - 2$  के रूप में होगा, जहां  $q$  एक पूर्णांक है

$$\text{पहले } p = 9q - 2 \text{ लेने पर } \Rightarrow m = 2p = 2(9q - 2)$$

$$q = 1 \text{ लेने पर, } m = 2 \times 7 = 14 \Rightarrow m^2 = 196$$

$$9n + 7 = 196 \Rightarrow 9n = 189 \Rightarrow n = 21$$

$\Rightarrow n + 6 = 27$  जो कि अभाज्य नहीं है

$$\text{अब } p = 9q + 2 \text{ लेने पर } \Rightarrow m = 2p = 2(9q + 2)$$

$$q = 1 \text{ लेने पर } \Rightarrow m = 2 \times 11 = 22 \Rightarrow m^2 = 484$$

$$9n + 7 = 484 \Rightarrow 9n = 477 \Rightarrow n = 53$$

$\Rightarrow n + 6 = 59$  जो कि अभाज्य है

इसलिए  $n = 53$  सबसे छोटी इस प्रकार की संख्या है

15. In how many ways can a pair of parallel diagonals of a regular polygon of 10 sides be selected नियमित दसभुज के विकर्णों के ऐसे कितने जोड़े चुने जा सकते हैं जिसमें कि दोनों विकर्ण समानांतर हों ?

Sol. (45)

If we take gap of 2 sides then from figure shown we have  ${}^4C_2$  ways

We can start with 1, 2, 3, 4, 5 so  $5 \times {}^4C_2 = 5 \times 6 = 30$  ways

## Resonance Eduventures Limited

REGISTERED & CORPORATE OFFICE: CG Tower, A-46 & 52, IPIA, Near City Mall, Jhalawar Road, Kota (Raj.)-324005

Ph.No. : 0744-2777777, 0744-2777700 | Toll Free : 1800 258 5555 | FAX No. : +91-022-39167222 | To Know more : sms RESO at 56677

Website : [www.resonance.ac.in](http://www.resonance.ac.in) | E-mail : [contact@resonance.ac.in](mailto:contact@resonance.ac.in) | CIN : U80302RJ2007PLC024029

Toll Free : 1800 258 5555

73400 10333

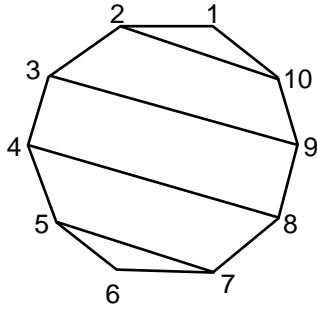
[facebook.com/ResonanceEdu](https://www.facebook.com/ResonanceEdu)

[twitter.com/ResonanceEdu](https://twitter.com/ResonanceEdu)

[www.youtube.com/resowatch](https://www.youtube.com/resowatch)

[blog.resonance.ac.in](http://blog.resonance.ac.in)



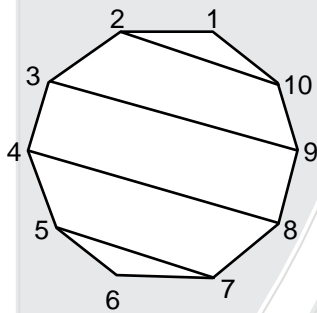


Now take 1 with 4 (gap of 3 sides) then we have 3 diagonals which are 14, 510, 69 so we have  ${}^3C_2$  ways

We can start with 1, 2, 3, 4, 5 so  $5 \times {}^3C_2 = 5 \times 3 = 15$  ways

यदि चित्र से दो भुजाओं का अंतर लिया जाता है तब  ${}^4C_2$  तरीके

यदि हम 1, 2, 3, 4, 5 से शुरूआत करते हैं तब  $5 \times {}^4C_2 = 5 \times 6 = 30$  तरीके



अब 1 को 4 (3 भुजाओं का अंतर लेते हैं) तब 3 विकर्ण जो कि 14, 510, 69 में हैं के तरीके  ${}^3C_2$  हम 1, 2, 3, 4, 5 के साथ शुरूआत कर सकते हैं। इसलिए  $5 \times {}^3C_2 = 5 \times 3 = 15$  तरीके

16. A pen costs Rs. 13 and a note book costs Rs. 17. A school spends exactly Rs. 10000 in the year 2017-18 to buy  $x$  pens and  $y$  note books such that  $x$  and  $y$  are as close as possible (i.e.  $|x - y|$  is minimum). Next year, in 2018-19, the school spends a little more than Rs. 10000 and buys  $y$  pens and  $x$  note books. How much more did the school pay ?

एक पेन का मूल्य रु. 13 है व एक कापी का मूल्य रु. 17 है। एक स्कूल 2017-18 में  $x$  पेन और  $y$  कापियों खरीदने में ठीक रु. 10000 खर्च करता है, ऐसे कि  $x$  व  $y$  जितना हो सकें उतना करीब हों (माने कि  $|x - y|$  न्यूनतम हो) अगले साल, 2018-19 में, स्कूल रु. 10000 से थोड़ा ज्यादा खर्च करता है, और  $y$  पेन व  $x$  कापियों खरीदता है। स्कूल ने कितना ज्यादा खर्च किया ?

Ans (40)

Sol.  $13x + 17y = 10000$

$17x + 13y = 10000 + a$

## Resonance Eduventures Limited

REGISTERED & CORPORATE OFFICE: CG Tower, A-46 & 52, IPIA, Near City Mall, Jhalawar Road, Kota (Raj.)-324005

Ph.No. : 0744-2777777, 0744-2777700 | Toll Free : 1800 258 5555 | FAX No. : +91-022-39167222 | To Know more : sms RESO at 56677

Website : [www.resonance.ac.in](http://www.resonance.ac.in) | E-mail : [contact@resonance.ac.in](mailto:contact@resonance.ac.in) | CIN : U80302RJ2007PLC024029

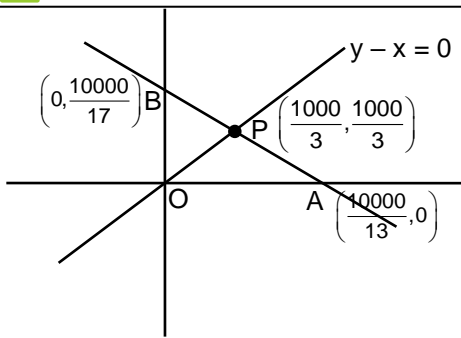
Toll Free : 1800 258 5555 73400 10333

[facebook.com/ResonanceEdu](https://www.facebook.com/ResonanceEdu)

[twitter.com/ResonanceEdu](https://twitter.com/ResonanceEdu)

[www.youtube.com/resowatch](https://www.youtube.com/resowatch)

[blog.resonance.ac.in](http://blog.resonance.ac.in)



$$x = \frac{10000 - 17y}{13}$$

$$y = 329$$

$$x = 339$$

$$\Rightarrow 10040$$

17. Find the number of ordered triples  $(a, b, c)$  of positive integers such that  $30a + 50b + 70c \leq 343$ .  
धनात्मक पूर्णाकों के ऐसे कितने क्रमवार समुच्चय  $(a, b, c)$  हैं जिनके लिए  $30a + 50b + 70c \leq 343$  है।

**Ans (30)**

**Sol.**  $30a + 50b + 70c \leq 343$

$$\Rightarrow 3a + 5b + 7c \leq 34.3$$

$$\Rightarrow 3a + 5b + 7c \leq 34$$

$$a, b, c \in \mathbb{N}, \quad a = 1 + p, \quad b = 1 + q, \quad c = 1 + r$$

$$3p + 5q + 7r \leq 19$$

If  $r = 0$ ,

$$q = 0 \Rightarrow p \text{ can take 7 values}$$

$$q = 1 \Rightarrow p \text{ can take 5 values}$$

$$q = 2 \Rightarrow p \text{ can take 4 values}$$

$$q = 3 \Rightarrow p \text{ can take 2 values}$$

$$\Rightarrow 18 \text{ values}$$

If  $r = 1$  then  $3p + 5q \leq 12$

$$q = 0 \Rightarrow p \text{ can take 5 values}$$

$$q = 1 \Rightarrow p \text{ can take 3 values}$$

$$q = 2 \Rightarrow p \text{ can take 1 value}$$

$$\Rightarrow 9 \text{ values}$$

If  $r = 2$  then  $3p + 5q \leq 5$

$$q = 0 \Rightarrow p \text{ can take 2 values}$$

$$q = 1 \Rightarrow p \text{ can take 1 value}$$

$$\Rightarrow 3 \text{ values}$$

$$\text{Total } 18 + 9 + 3 = 30 \text{ values}$$

$$30a + 50b + 70c \leq 343$$

$$\Rightarrow 3a + 5b + 7c \leq 34.3$$

$$\Rightarrow 3a + 5b + 7c \leq 34$$

## Resonance Eduventures Limited

REGISTERED & CORPORATE OFFICE: CG Tower, A-46 & 52, IPIA, Near City Mall, Jhalawar Road, Kota (Raj.)-324005

Ph.No. : 0744-2777777, 0744-2777700 | Toll Free : 1800 258 5555 | FAX No. : +91-022-39167222 | To Know more : sms RESO at 56677

Website : [www.resonance.ac.in](http://www.resonance.ac.in) | E-mail : [contact@resonance.ac.in](mailto:contact@resonance.ac.in) | CIN : U80302RJ2007PLC024029

Toll Free : 1800 258 5555 73400 10333

[facebook.com/ResonanceEdu](https://www.facebook.com/ResonanceEdu)

[twitter.com/ResonanceEdu](https://twitter.com/ResonanceEdu)

[www.youtube.com/resowatch](https://www.youtube.com/resowatch)

[blog.resonance.ac.in](http://blog.resonance.ac.in)

$$a, b, c \in \mathbb{N}, \quad a = 1 + p, \quad b = 1 + q, \quad c = 1 + r$$

$$3p + 5q + 7r \leq 19$$

यदि  $r = 0$ ,

$q = 0 \Rightarrow p, 7$  मान ले सकता है।

$q = 1 \Rightarrow p, 5$  मान ले सकता है।

$q = 2 \Rightarrow p, 4$  मान ले सकता है।

$q = 3 \Rightarrow p, 2$  मान ले सकता है।

$\Rightarrow 18$  मान

यदि  $r = 1$  तब  $3p + 5q \leq 12$

$q = 0 \Rightarrow p, 5$  मान ले सकता है।

$q = 1 \Rightarrow p, 3$  मान ले सकता है।

$q = 2 \Rightarrow p, 1$  मान ले सकता है।

$\Rightarrow 9$  मान

यदि  $r = 2$  तब  $3p + 5q \leq 5$

$q = 0 \Rightarrow p, 2$  मान ले सकता है।

$q = 1 \Rightarrow p, 1$  मान ले सकता है।

$\Rightarrow 3$  मान

कुल  $18 + 9 + 3 = 30$  मान

18. How many ordered pairs  $(a, b)$  of positive integers with  $a < b$  and  $100 \leq a, b \leq 1000$  satisfy  $\gcd(a, b) : \text{lcm}(a, b) = 1 : 495$  ? .

धनात्मक पूर्णाकों के ऐसे कितने क्रमवार जोड़े  $(a, b)$  हैं जहाँ  $a < b$  व  $100 \leq a, b \leq 1000$  और जिनके लिए  $\gcd(a, b) : \text{lcm}(a, b) = 1 : 495$  ? (यहाँ  $\gcd =$  महत्तम समापवर्तक :  $\text{lcm} =$  ल.स. लघुत्तम समापवर्तक) .

Sol. (20)

$$ab = (\gcd)^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$$

$$\left(\frac{a}{\gcd}\right) \left(\frac{b}{\gcd}\right) = 3^2 \cdot 5 \cdot 11$$

$$\left(\frac{a}{\gcd}\right) \left(\frac{b}{\gcd}\right) \gcd$$

$$3^2 \quad 5 \cdot 11 \quad 12, 13, \dots, 18 \quad (100 \leq a, b \leq 1000)$$

$$5 \quad 3^2 \cdot 11 \quad \text{no value कोई मान नहीं।} \quad (100 \leq a, b \leq 1000)$$

$$11 \quad 3^2 \cdot 5 \quad 10, 11, \dots, 22 \quad (100 \leq a, b \leq 1000)$$

$$1 \quad 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \quad \text{no value कोई मान नहीं।} \quad (100 \leq a, b \leq 1000)$$

इसलिए so  $7 + 13 = 20$  मान values

## Resonance Eduventures Limited

REGISTERED & CORPORATE OFFICE: CG Tower, A-46 & 52, IPIA, Near City Mall, Jhalawar Road, Kota (Raj.)-324005

Ph.No. : 0744-2777777, 0744-2777700 | Toll Free : 1800 258 5555 | FAX No. : +91-022-39167222 | To Know more : sms RESO at 56677

Website : [www.resonance.ac.in](http://www.resonance.ac.in) | E-mail : [contact@resonance.ac.in](mailto:contact@resonance.ac.in) | CIN : U80302RJ2007PLC024029

Toll Free : 1800 258 5555

73400 10333

[facebook.com/ResonanceEdu](https://www.facebook.com/ResonanceEdu)

[twitter.com/ResonanceEdu](https://twitter.com/ResonanceEdu)

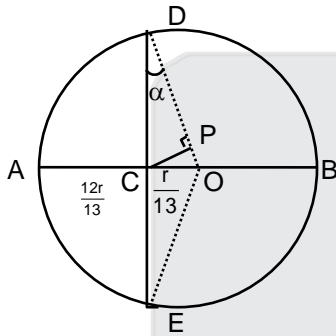
[www.youtube.com/resowatch](https://www.youtube.com/resowatch)

[blog.resonance.ac.in](http://blog.resonance.ac.in)

19. Let AB be a diameter of a circle and let C be a point on the segment AB such that  $AC : CB = 6 : 7$ . Let D be a point on the circle such that DC is perpendicular to AB. Let DE be the diameter through D. If  $[XYZ]$  denotes the area of the triangle XYZ. Find  $[ABD]/[CDE]$  to the nearest integer.

मान लो कि AB एक वृत्त का व्यास है और मान लो कि C रेखाखंड AB पर ऐसा बिंदु है जिससे कि  $AC : CB = 6 : 7$  है। मान लो कि D वृत्त पर एक ऐसा बिंदु है कि DC खंड AB पर लंब है। मान लो कि DE बिंदु D से गुजरता हुआ वृत्त का व्यास है। अगर  $[XYZ]$  से हमारा मतलब त्रिभुज XYZ का क्षेत्रफल है तो  $[ABD]/[CDE]$  का मान सबसे करीबी पूर्णांक तक ज्ञात करो।

Ans (13)



Sol.

$$CD = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{13^2}} = \frac{r}{13} \sqrt{12 \times 14}$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{12 \times 14}} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{12 \times 14 + 1}}$$

$$\frac{CP}{CD} = \sin \alpha = \frac{CP}{\frac{r}{13} \sqrt{12 \times 14}} = \frac{1}{\sqrt{12 \times 14 + 1}}$$

$$CP = \frac{r \sqrt{12 \times 14}}{13 \sqrt{12 \times 14 + 1}}$$

$$\frac{|ABD|}{|CDE|} = \frac{\frac{1}{2}(2r) \times \frac{r}{13} \sqrt{12 \times 14}}{\frac{1}{2}(2r) \times \frac{r}{13} \frac{\sqrt{12 \times 14}}{\sqrt{12 \times 14 + 1}}} = \sqrt{12 \times 14 + 1} = 13$$

20. Consider the set E of all natural numbers n such that when divided by 11,12,13 respectively, the remainders, in that order, are distinct prime numbers in an arithmetic progression. If N is the largest number in E, find the sum of digits of N.

मान लो कि E ऐसी प्राकृतिक संख्याओं n का समुच्चय है जिन्हें 11,12,13 से भाग देने पर मिलने वाले शेष ऐसी अलग-अलग अभाज्य संख्याएँ हैं जो इसी क्रम में समान्तर श्रेणी में हैं। अगर N समुच्चय E की सबसे बड़ी संख्या है तो N के अंको का योग ज्ञात करो।

Ans Bonus

Sol. N can be of the type  $(11 \times 12 \times 13 \times \lambda) + 29$  (where  $\lambda$  belongs to integer) so there no largest value.

N का प्रकार  $(11 \times 12 \times 13 \times \lambda) + 29$  (जहाँ  $\lambda$  पूर्णांक है) इसलिए अधिकतम पूर्णांक मान नहीं।

## Resonance Eduventures Limited

REGISTERED & CORPORATE OFFICE: CG Tower, A-46 & 52, IPIA, Near City Mall, Jhalawar Road, Kota (Raj.)-324005

Ph.No. : 0744-2777777, 0744-2777700 | Toll Free : 1800 258 5555 | FAX No. : +91-022-39167222 | To Know more : sms RESO at 56677

Website : [www.resonance.ac.in](http://www.resonance.ac.in) | E-mail : [contact@resonance.ac.in](mailto:contact@resonance.ac.in) | CIN : U80302RJ2007PLC024029

Toll Free : 1800 258 5555 73400 10333

[facebook.com/ResonanceEdu](https://www.facebook.com/ResonanceEdu)

[twitter.com/ResonanceEdu](https://twitter.com/ResonanceEdu)

[www.youtube.com/resowatch](https://www.youtube.com/resowatch)

[blog.resonance.ac.in](http://blog.resonance.ac.in)

21. Consider the set  $E = \{5,6,7,8,9\}$ . For any partition  $\{A,B\}$  of  $E$ , with both  $A$  and  $B$  non empty. Consider the number obtained by adding the product of elements of  $A$  to the product of elements of  $B$ . Let  $N$  be the largest prime number among these numbers. Find the sum of the digits of  $N$ .  
समुच्चय  $E = \{5,6,7,8,9\}$  को लो।  $E$  के किसी भी विभाजन  $\{A,B\}$  के लिए, जहाँ  $A$  और  $B$  दोनों अरिक्त हैं,  $A$  के सदस्यों के गुणनफल का  $B$  के सदस्यों के गुणनफल से योग लेने पर मिलने वाली संख्या को लो।  $N$  इन सभी संख्याओं में सबसे बड़ा अभाज्य है।  $N$  के अंकों (digits) का योग ज्ञात करो।

**Sol. (17)**

one of the set  $A$  or set  $B$  contain only odd number

समुच्चय  $A$  या समुच्चय  $B$  में से केवल एक समुच्चय की विषम संख्या हो सकती है।

	set A	set B	Comment
Case I	5	6,7,8,9	$5 + 6 \times 7 \times 8 \times 9 = 3029$ Which is divisible by 13
II	7	5,6,8,9	$7 + 5 \times 6 \times 8 \times 9 = 2167$ Which is divisible by 11
III	9	5,6,7,8	$9 + 5 \times 6 \times 7 \times 8$ is multiple of 3
IV	5,7	6,8,9	$5 \times 7 + 6 \times 8 \times 9 = 467$ which is prime
V	5,9	6,7,8	$5 \times 9 + 6 \times 7 \times 8$ is divisible by 3
VI	7,9	5,6,8	$7 \times 9 + 5 \times 6 \times 8$ is divisible by 3
VII	5,7,9	6,8	$5 \times 7 \times 9 + 6 \times 8$ is divisible by 3

Hence  $N$  is 467

Sum of the digit of  $N$  is 17

	समुच्चय A	समुच्चय B	तर्क
स्थिति I	5	6,7,8,9	$5 + 6 \times 7 \times 8 \times 9 = 3029$ जो कि 13 से विभाजित है।
II	7	5,6,8,9	$7 + 5 \times 6 \times 8 \times 9 = 2167$ जो कि 11 से विभाजित है।
III	9	5,6,7,8	$9 + 5 \times 6 \times 7 \times 8$ , 3 का गुणज है।
IV	5,7	6,8,9	$5 \times 7 + 6 \times 8 \times 9 = 467$ जो कि अभाज्य है।
V	5,9	6,7,8	$5 \times 9 + 6 \times 7 \times 8$ , 3 से विभाजित है।
VI	7,9	5,6,8	$7 \times 9 + 5 \times 6 \times 8$ , 3 से विभाजित है।
VII	5,7,9	6,8	$5 \times 7 \times 9 + 6 \times 8$ , 3 से विभाजित है।

अतः  $N$  का मान 467 है।

$N$  के अंकों का योगफल 17 है।

## Resonance Eduventures Limited

REGISTERED & CORPORATE OFFICE: CG Tower, A-46 & 52, IPIA, Near City Mall, Jhalawar Road, Kota (Raj.)-324005

Ph.No. : 0744-2777777, 0744-2777700 | Toll Free : 1800 258 5555 | FAX No. : +91-022-39167222 | To Know more : sms RESO at 56677

Website : [www.resonance.ac.in](http://www.resonance.ac.in) | E-mail : [contact@resonance.ac.in](mailto:contact@resonance.ac.in) | CIN : U80302RJ2007PLC024029

Toll Free : 1800 258 5555

73400 10333

[facebook.com/ResonanceEdu](https://www.facebook.com/ResonanceEdu)

[twitter.com/ResonanceEdu](https://twitter.com/ResonanceEdu)

[www.youtube.com/resowatch](https://www.youtube.com/resowatch)

[blog.resonance.ac.in](http://blog.resonance.ac.in)



22. What is the greatest integer not exceeding the sum  $\sum_{n=1}^{1599} \frac{1}{\sqrt{n}}$

ऐसा सबसे बड़ा पूर्णांक ज्ञात करो जो कि योग  $\sum_{n=1}^{1599} \frac{1}{\sqrt{n}}$  से बड़ा ना हो।

Sol. (78)

$$\int_1^{1600} \frac{dx}{\sqrt{x}} < \sum_{n=1}^{1599} \frac{1}{\sqrt{n}} < 1 + \int_1^{1599} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$|2\sqrt{x}|_1^{1600} < \sum_{n=1}^{1599} \frac{1}{\sqrt{n}} < 1 + |2\sqrt{x}|_1^{1599}$$

$$78 < \sum_{n=1}^{1599} \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{1599} - 1$$

$$78 < \sum_{n=1}^{1599} \frac{1}{\sqrt{n}} < 78.97.....$$

$$\Rightarrow \left[ \sum_{n=1}^{1599} \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = 78$$

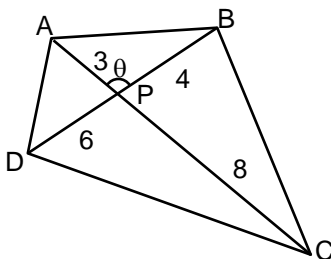
23. Let ABCD be a convex cyclic quadrilateral. Suppose P is a point in the plane of the quadrilateral such that the sum of its distances from the vertices of ABCD is the least. If  $\{PA, PB, PC, PD\} = \{3, 4, 6, 8\}$

What is the maximum possible area of ABCD ?

मान लो कि ABCD एक उत्तल (convex) चक्रीय (cyclic) चतुर्भुज है। मान लो कि P चतुर्भुज के तल में ऐसा बिंदु है जिसकी चतुर्भुज ABCD के शीर्षों से दूरियों का योग न्यूनतम है। अगर  $\{PA, PB, PC, PD\} = \{3, 4, 6, 8\}$  तो ABCD का अधिकतम संभव क्षेत्रफल कितना है ?

Ans (55)

Sol. P must be point of intersection of diagonals AC and BD



Let  $\angle APB = \theta$ , then

$$\text{area of } \triangle PAB = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \sin\theta$$

## Resonance Eduventures Limited

REGISTERED & CORPORATE OFFICE: CG Tower, A-46 & 52, IPIA, Near City Mall, Jhalawar Road, Kota (Raj.)-324005

Ph.No. : 0744-2777777, 0744-2777700 | Toll Free : 1800 258 5555 | FAX No. : +91-022-39167222 | To Know more : sms RESO at 56677

Website : [www.resonance.ac.in](http://www.resonance.ac.in) | E-mail : [contact@resonance.ac.in](mailto:contact@resonance.ac.in) | CIN : U80302RJ2007PLC024029

Toll Free : 1800 258 5555

73400 10333

[facebook.com/ResonanceEdu](https://www.facebook.com/ResonanceEdu)

[twitter.com/ResonanceEdu](https://twitter.com/ResonanceEdu)

[www.youtube.com/resowatch](https://www.youtube.com/resowatch)

[blog.resonance.ac.in](http://blog.resonance.ac.in)

$$\text{area of } \triangle PAD = \frac{1}{2} \times 3 \times 6 \times \sin(\pi - \theta)$$

$$\text{area of } \triangle PDC = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \times \sin\theta$$

$$\text{area of } \triangle PCB = \frac{1}{2} \times 8 \times 4 \times \sin(\pi - \theta)$$

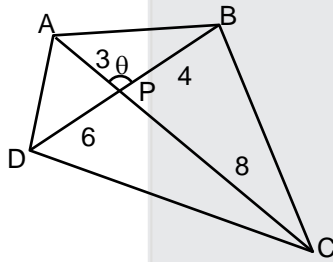
⇒ area of quadrilateral ABCD is

$$\frac{1}{2} (12 + 18 + 48 + 32) \sin\theta$$

$$= (6 + 9 + 24 + 16) \sin\theta$$

Maximum area of quadrilateral ABCD is  $6 + 9 + 24 + 16 = 55$ .

P, विकर्ण AC और BD का प्रतिच्छेद बिन्दु होगा।



माना  $\angle APB = \theta$ , तब

$$\triangle PAB \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \sin\theta$$

$$\triangle PAD \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times 3 \times 6 \times \sin(\pi - \theta)$$

$$\triangle PDC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \times \sin\theta$$

$$\triangle PCB \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times 8 \times 4 \times \sin(\pi - \theta)$$

⇒ चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल

$$\frac{1}{2} (12 + 18 + 48 + 32) \sin\theta = (6 + 9 + 24 + 16) \sin\theta$$

चतुर्भुज ABCD का अधिकतम क्षेत्रफल  $6 + 9 + 24 + 16 = 55$ .

24. A  $1 \times n$  rectangle ( $n \geq 1$ ) is divided into  $n$  unit ( $1 \times 1$ ) squares. Each square of this rectangle is coloured red, blue or green. Let  $f(n)$  be the number of colourings of the rectangle in which there are an even number of red squares. What is the largest prime factor of  $f(9) / f(3)$ ? (The number of red squares can be zero)

एक  $1 \times n$  आयत ( $n \geq 1$ ) को  $n$  इकाई ( $1 \times 1$ ) वर्गों में बाँट देते हैं। इस आयत के हर वर्ग को लाल, नीला या हरा रंग देते हैं। मान लो कि  $f(n)$  वह संख्या है जितने तरीकों से ऐसे रंग सकते हैं कि लाल रंग के आयतों की संख्या सम हो।  $f(9) / f(3)$  का सबसे बड़ा अभाज्य गुणखंड क्या है? (लाल वर्गों की संख्या शून्य हो सकती है।)

## Resonance Eduventures Limited

REGISTERED & CORPORATE OFFICE: CG Tower, A-46 & 52, IPIA, Near City Mall, Jhalawar Road, Kota (Raj.)-324005

Ph.No. : 0744-2777777, 0744-2777700 | Toll Free : 1800 258 5555 | FAX No. : +91-022-39167222 | To Know more : sms RESO at 56677

Website : [www.resonance.ac.in](http://www.resonance.ac.in) | E-mail : [contact@resonance.ac.in](mailto:contact@resonance.ac.in) | CIN : U80302RJ2007PLC024029

Toll Free : 1800 258 5555

73400 10333

[facebook.com/ResonanceEdu](https://www.facebook.com/ResonanceEdu)

[twitter.com/ResonanceEdu](https://twitter.com/ResonanceEdu)

[www.youtube.com/resowatch](https://www.youtube.com/resowatch)

[blog.resonance.ac.in](http://blog.resonance.ac.in)

Sol. (37)

$$f(n) = {}^nC_0 2^n + {}^nC_2 2^{n-2} + {}^nC_4 2^{n-4} + \dots$$

$$\text{Now अब } (2 + 1)^n = {}^nC_0 2^n + {}^nC_1 2^{n-1} + {}^nC_2 2^{n-2} + {}^nC_3 2^{n-3} + \dots \quad (1)$$

$$(2 - 1)^n = {}^nC_0 2^n - {}^nC_1 2^{n-1} + {}^nC_2 2^{n-2} - {}^nC_3 2^{n-3} + \dots \quad (2)$$

add (1) and (2)

(1) व (2) को जोड़ने पर

$$3^n + 1 = 2[{}^nC_0 2^n + {}^nC_2 2^{n-2} + {}^nC_4 2^{n-4} + \dots]$$

$$f(n) = \frac{3^n + 1}{2}$$

$$f(9) = \frac{3^9 + 1}{2}, f(3) = \frac{3^3 + 1}{2}$$

$$\frac{f(9)}{f(3)} = \frac{3^9 + 1}{3^3 + 1} = 3^6 - 3^3 + 1 = 703 = 19 \times 37$$

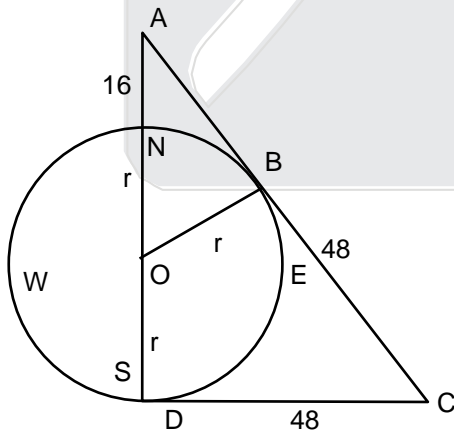
⇒ Largest prime factor is 37.

अधिकतम अभाज्य गुणनखण्ड 37 है।

25. A village has a circular wall around it, and the wall has four gates pointing north, south east and west. A tree stands outside the village, 16m north of the north gate, and it can be just seen appearing on the horizon from a point 48 m east of the south gate. What is the diameter in meters, of the wall that surrounds the village ?

एक गाँव के चारों तरफ एक गोल दीवार है जिसमें पूरब, पश्चिम, उत्तर व दक्षिण की तरफ चार द्वार हैं। गाँव के बाहर लगा एक पेड़ उत्तर द्वार के 16 मी. उत्तर में है और वह दक्षिण द्वार के 48 मी. पूरब स्थित बिन्दु से बस क्षितिज पर उभरता हुआ थोड़ा सा दिखाई देता है। गाँव को घेरती हुई दीवार का मीटर में व्यास क्या है ?

Sol. (48)



Let radius equals to r

माना त्रिज्या r है।

$$AB = \sqrt{AO^2 - OB^2} = \sqrt{(16+r)^2 - r^2} = \sqrt{256 + 32r}$$

$$AD^2 + CD^2 = AC^2$$

## Resonance Eduventures Limited

REGISTERED & CORPORATE OFFICE: CG Tower, A-46 & 52, IPIA, Near City Mall, Jhalawar Road, Kota (Raj.)-324005

Ph.No. : 0744-2777777, 0744-2777700 | Toll Free : 1800 258 5555 | FAX No. : +91-022-39167222 | To Know more : sms RESO at 56677

Website : [www.resonance.ac.in](http://www.resonance.ac.in) | E-mail : [contact@resonance.ac.in](mailto:contact@resonance.ac.in) | CIN : U80302RJ2007PLC024029

Toll Free : 1800 258 5555

73400 10333

[facebook.com/ResonanceEdu](https://www.facebook.com/ResonanceEdu)

[twitter.com/ResonanceEdu](https://twitter.com/ResonanceEdu)

[www.youtube.com/resowatch](https://www.youtube.com/resowatch)

[blog.resonance.ac.in](http://blog.resonance.ac.in)

$$\Rightarrow (48)^2 + (2r + 16)^2 = (48 + \sqrt{256 + 32r})^2$$

$$\Rightarrow r^2 + 8r = 24\sqrt{256 + 32r}$$

$$\Rightarrow r(r + 8) = 24 \times 4\sqrt{2} \sqrt{r + 8}$$

$$\Rightarrow r\sqrt{r + 8} = 24\sqrt{32}$$

$$\Rightarrow r = 24$$

Diameter equal to 48

व्यास 48 के बराबर है।

26. Positive integers  $x, y, z$  satisfy  $xy + z = 160$ . Compute the smallest possible value of  $x + yz$ .

धनात्मक पूर्णांक  $x, y, z$  समीकरण  $xy + z = 160$  को संतुष्ट करते हैं।  $x + yz$  का न्यूनतम संभव मान ज्ञात करो।

Sol. (50)

$$x + yz = \frac{160 - z}{y} + yz$$

$$\frac{160}{y} + \frac{z(y^2 - 1)}{y} = \frac{(160 - z)}{y} + \frac{zy^2}{y} = \frac{160 - z}{y} + zy$$

At particle value of  $z$  it is greater

than equal to  $2\sqrt{z(160 - z)}$

$$\Rightarrow \text{least value is } 2\sqrt{z(160 - z)}$$

but integer also

Now least for least value  $z$  is also

Case I

$$z = 1, x + yz = \frac{159}{y} + y$$

$\Rightarrow$  minimum value is at  $y = 3$  which is 56

Case II

$$z = 2, x + yz = \frac{158}{y} + 2y$$

$\Rightarrow$  minimum value at  $y = 2$  which is 83 (rejected)

Case III

$$z = 3, x + yz = \frac{157}{y} + 3y$$

$\Rightarrow$  minimum at  $y = 1$  which is 160 (rejected)

Case IV

$$z = 4, x + yz = \frac{156}{y} + 4y$$

$\Rightarrow$  minimum at  $y = 6$  which is 50 (accept)

Case V

## Resonance Eduventures Limited

REGISTERED & CORPORATE OFFICE: CG Tower, A-46 & 52, IPIA, Near City Mall, Jhalawar Road, Kota (Raj.)-324005

Ph.No. : 0744-2777777, 0744-2777700 | Toll Free : 1800 258 5555 | FAX No. : +91-022-39167222 | To Know more : sms RESO at 56677

Website : [www.resonance.ac.in](http://www.resonance.ac.in) | E-mail : [contact@resonance.ac.in](mailto:contact@resonance.ac.in) | CIN : U80302RJ2007PLC024029

Toll Free : 1800 258 5555

73400 10333

[facebook.com/ResonanceEdu](https://www.facebook.com/ResonanceEdu)

[twitter.com/ResonanceEdu](https://twitter.com/ResonanceEdu)

[www.youtube.com/resowatch](https://www.youtube.com/resowatch)

[blog.resonance.ac.in](http://blog.resonance.ac.in)

$$z = 5, x + y \quad z = \frac{155}{y} + 5y$$

minimum value at  $y = 5$  which is 56 (reject)

Case VI

$$z = 6, x + y \quad z = \frac{154}{y} + 6y \geq 2\sqrt{924} > 50$$

similarly in all the cases minimum value is greater than 50. then answer is 50

**Hindi**  $x + yz = \frac{160 - z}{y} + yz$

$$\frac{160}{y} + \frac{z(y^2 - 1)}{y} = \frac{(160 - z)}{y} + \frac{zy^2}{y} = \frac{160 - z}{y} + zy$$

$z$  का एक मान

$2\sqrt{z(160 - z)}$  से बड़ा होगा

$\Rightarrow$  न्यूनतम मान  $2\sqrt{z(160 - z)}$

परन्तु पूर्णांक भी

अब  $z$  का न्यूनतम से न्यूनतम मान के लिए स्थिति I

$$z = 1, x + y \quad z = \frac{159}{y} + y$$

$\Rightarrow y = 3$  पर न्यूनतम मान 56 है

स्थिति II

$$z = 2, x + y \quad z = \frac{158}{y} + 2y$$

$\Rightarrow y = 2$  पर न्यूनतम मान 83 है (अस्वीकार्य)

स्थिति III

$$z = 3, x + y \quad z = \frac{157}{y} + 3y$$

$\Rightarrow y = 1$  पर न्यूनतम मान 160 है (अस्वीकार्य)

स्थिति IV

$$z = 4, x + y \quad z = \frac{156}{y} + 4y$$

$\Rightarrow y = 6$  न्यूनतम मान 50 है (स्वीकार्य)

स्थिति V

$$z = 5, x + y \quad z = \frac{155}{y} + 5y$$

$y = 5$  न्यूनतम मान 56 है (अस्वीकार्य)

## Resonance Eduventures Limited

REGISTERED & CORPORATE OFFICE: CG Tower, A-46 & 52, IPIA, Near City Mall, Jhalawar Road, Kota (Raj.)-324005

Ph.No. : 0744-2777777, 0744-2777700 | Toll Free : 1800 258 5555 | FAX No. : +91-022-39167222 | To Know more : sms RESO at 56677

Website : [www.resonance.ac.in](http://www.resonance.ac.in) | E-mail : [contact@resonance.ac.in](mailto:contact@resonance.ac.in) | CIN : U80302RJ2007PLC024029

Toll Free : 1800 258 5555

73400 10333

[facebook.com/ResonanceEdu](https://www.facebook.com/ResonanceEdu)

[twitter.com/ResonanceEdu](https://twitter.com/ResonanceEdu)

[www.youtube.com/resowatch](https://www.youtube.com/resowatch)

[blog.resonance.ac.in](http://blog.resonance.ac.in)



स्थिति VI

$$z = 6, x + y \quad z = \frac{154}{y} + 6y \geq 2\sqrt{924} > 50$$

इसी प्रकार सभी स्थितियों में न्यूनतम मान 50 से बड़ा है तब उत्तर 50 है

27. We will say that a rearrangement of the letters of a word has no fixed letters if. When the rearrangement is placed directly below the word, no column has the same letter repeated. For instance, H B R A T A is a rearrangement with no fixed letters of B H A R A T. How many distinguishable rearrangement with no fixed letters does B H A R A T have ? (The two A's are considered identical)

हम कहेंगे कि किसी शब्द के अक्षरों के क्रमचय में कोई स्थिर अक्षर नहीं है अगर, जब हम क्रमचय को शब्द के ठीक नीचे लिखें, तो किसी भी स्तंभ में एक ही अक्षर ऊपर नीचे दोनों जगह नहीं होगा। जैसे कि शब्द B H A R A T के क्रमचय H B R A T A में कोई स्थिर अक्षर नहीं है। B H A R A T के अलग-अलग ऐसे कितने क्रमचय हैं जिनमें कोई स्थिर अक्षर नहीं है ? (यहाँ मानेंगे कि दोनों A में कोई भेद नहीं है।)

Sol. (84)

Let us assume the 2A's to  $A_1$  and  $A_2$

BHA<sub>1</sub> RA<sub>2</sub>T

Number of rearrangements of these 6.

$$= 6 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right) = 265$$

Let P be the set when  $A_2$  occupies place of  $A_1$  and  $\theta$  be the set when  $A_1$  occupies place of  $A_2$

$$n(P) = 53, \quad n(Q) = 53$$

$$n(n \cap Q) = 9$$

Hence required arrangements

$$= \frac{1}{2} (265 - n(P \cup Q))$$

$$= \frac{1}{2} (265 - 106 + 9)$$

$$= \frac{168}{2} = 84$$

माना कि 2A's इस प्रकार  $A_1$  और  $A_2$

BHA<sub>1</sub> RA<sub>2</sub>T

इन 6 के पुनः व्यवस्थीकरण की संख्या

$$= 6 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right) = 265$$

माना P एक समुच्चय है जब  $A_2$ ,  $A_1$  के स्थान पर आता है और  $\theta$  समुच्चय है जब  $A_1$ ,  $A_2$  के स्थान पर आता है

$$n(P) = 53, \quad n(Q) = 53$$

$$n(n \cap Q) = 9$$

अतः अभीष्ट क्रमचय

$$= \frac{1}{2} (265 - n(P \cup Q))$$

## Resonance Eduventures Limited

REGISTERED & CORPORATE OFFICE: CG Tower, A-46 & 52, IPIA, Near City Mall, Jhalawar Road, Kota (Raj.)-324005

Ph.No. : 0744-2777777, 0744-2777700 | Toll Free : 1800 258 5555 | FAX No. : +91-022-39167222 | To Know more : sms RESO at 56677

Website : [www.resonance.ac.in](http://www.resonance.ac.in) | E-mail : [contact@resonance.ac.in](mailto:contact@resonance.ac.in) | CIN : U80302RJ2007PLC024029

Toll Free : 1800 258 5555

73400 10333

[facebook.com/ResonanceEdu](https://www.facebook.com/ResonanceEdu)

[twitter.com/ResonanceEdu](https://twitter.com/ResonanceEdu)

[www.youtube.com/resowatch](https://www.youtube.com/resowatch)

[blog.resonance.ac.in](http://blog.resonance.ac.in)

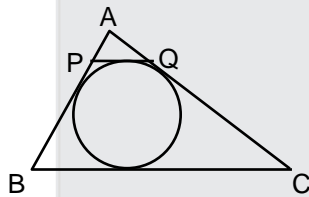
$$= \frac{1}{2} (265 - 106 + 9)$$

$$= \frac{168}{2} = 84$$

28. Let ABC be a triangle with sides 51, 52, 53. Let  $\Omega$  denote the incircle of  $\triangle ABC$ . Draw tangents to  $\Omega$  which are parallel to the sides of ABC. Let  $r_1, r_2, r_3$  be the inradii of the three corner triangles so formed. Find the largest integer that does not exceed  $r_1 + r_2 + r_3$ .

मान लो कि ABC एक त्रिभुज है जिसकी भुजाओं का मान 51, 52, 53 है। मान लो कि  $\Omega$  त्रिभुज  $\triangle ABC$  का अंतःवृत्त है।  $\Omega$  के वह स्पर्शक बनाओ जो कि ABC की भुजाओं के समानांतर हैं। मान लो कि कोनों पर बने तीन त्रिभुजों का अंतःव्यास  $r_1, r_2, r_3$  है। ऐसा अधिकतम पूर्णांक कौनसा होगा जो  $r_1 + r_2 + r_3$  के मान से ज्यादा न हो ?

Ans (15)



Sol.

Let PQ be one of the required tangents is parallel to BC and meets sides AB and AC at P and Q respectively.

Further Let  $PQ = x$   
and  $BC = 51$

Now  $\triangle ABC$  is similar to  $\triangle APQ$  so  $\frac{x}{a} = \frac{r_1}{r}$

Similarly  $\frac{y}{b} = \frac{r_2}{r}$

Hence  $\frac{r_1 + r_2 + r_3}{r} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}$

Now  $\frac{x}{a} = \frac{h - 2r}{h}$  where h is altitude

$$\frac{x}{a} = 1 - \frac{2\Delta}{s \cdot 2\Delta}, x = 1 - \frac{a}{s}$$

$$\sum \frac{x}{a} = 3 - \frac{a+b+c}{s} = 1$$

SO  $r_1 + r_2 + r_3 = r$

$$\text{Now } r = \sqrt{\frac{78(27)(26)(25)}{78}}$$

$$= \sqrt{\frac{3^3 \cdot 5^2 \cdot 2 \cdot 13}{2 \cdot 3 \cdot 13}}$$

$$= \sqrt{3^2 \cdot 5^2} = 15$$

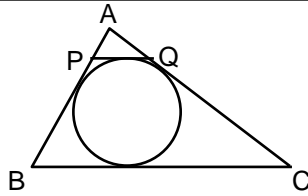
## Resonance Eduventures Limited

REGISTERED & CORPORATE OFFICE: CG Tower, A-46 & 52, IPIA, Near City Mall, Jhalawar Road, Kota (Raj.)-324005  
Ph.No. : 0744-2777777, 0744-2777700 | Toll Free : 1800 258 5555 | FAX No. : +91-022-39167222 | To Know more : sms RESO at 56677

Website : [www.resonance.ac.in](http://www.resonance.ac.in) | E-mail : [contact@resonance.ac.in](mailto:contact@resonance.ac.in) | CIN : U80302RJ2007PLC024029

Toll Free : 1800 258 5555 | 73400 10333 | [facebook.com/ResonanceEdu](https://facebook.com/ResonanceEdu) | [twitter.com/ResonanceEdu](https://twitter.com/ResonanceEdu) | [www.youtube.com/resowatch](https://www.youtube.com/resowatch) | [blog.resonance.ac.in](http://blog.resonance.ac.in)

Sol.



माना PQ स्पर्श रेखा में से एक स्पर्श रेखा है जो BC के समान्तर है तथा AB और AC को क्रमशः P और Q पर मिलती है

माना Let PQ = x

और BC = 51

अब  $\Delta ABC$ ,  $\Delta APQ$  के समरूप है  $\frac{x}{a} = \frac{r_1}{r}$

इसी प्रकार  $\frac{y}{b} = \frac{r_2}{r}$

अतः  $\frac{r_1 + r_2 + r_3}{r} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}$

अब  $\frac{x}{a} = \frac{h - 2r}{h}$  जहाँ h शीर्ष लम्ब है

$$\frac{x}{a} = 1 - \frac{2\Delta}{s \cdot 2\Delta}, x = 1 - \frac{a}{s}$$

$$\sum \frac{x}{a} = 3 - \frac{a+b+c}{s} = 1$$

इसलिए  $r_1 + r_2 + r_3 = r$

अब  $r = \sqrt{\frac{78(27)(26)(25)}{78}}$

$$= \sqrt{\frac{3^3 \cdot 5^2 \cdot 2 \cdot 13}{2 \cdot 3 \cdot 13}}$$

$$= \sqrt{3^2 \cdot 5^2} = 15$$

29. In a triangle ABC, the median AD (with D on BC) and the angle bisector BE (with E on AC) are perpendicular to each other. If AD = 7 and BE = 9, find the integer nearest to the area of triangle ABC.

एक त्रिभुज ABC में मधिका AD (जहाँ D भुजा BC पर है) और कोण-समद्विभाजक BE (जहाँ E भुजा AC पर है) लम्ब हैं। अगर AD = 7 व BE = 9 तो ABC के क्षेत्रफल के सबसे करीबी पूर्णांक का मान ज्ञात करो।

Ans (47)

Sol.

## Resonance Eduventures Limited

REGISTERED & CORPORATE OFFICE: CG Tower, A-46 & 52, IPIA, Near City Mall, Jhalawar Road, Kota (Raj.)-324005

Ph.No. : 0744-2777777, 0744-2777700 | Toll Free : 1800 258 5555 | FAX No. : +91-022-39167222 | To Know more : sms RESO at 56677

Website : [www.resonance.ac.in](http://www.resonance.ac.in) | E-mail : [contact@resonance.ac.in](mailto:contact@resonance.ac.in) | CIN : U80302RJ2007PLC024029

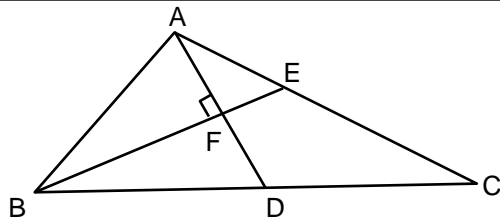
Toll Free : 1800 258 5555 73400 10333

[facebook.com/ResonanceEdu](https://www.facebook.com/ResonanceEdu)

[twitter.com/ResonanceEdu](https://twitter.com/ResonanceEdu)

[www.youtube.com/resowatch](https://www.youtube.com/resowatch)

[blog.resonance.ac.in](http://blog.resonance.ac.in)



Let AD and BE meet at F

Now  $\angle ABF = \angle FBD = \frac{B}{2}$  and  $\angle AFB = \angle BFD = 30^\circ$  and BF is common to triangles ABF and BFD

hence the two triangles are

Congruent so  $AF = FD = \frac{7}{2}$

Also,  $AB = BD, \Rightarrow AB : BC = 1 : 2$

$\Rightarrow AE : EC = 1 : 2$

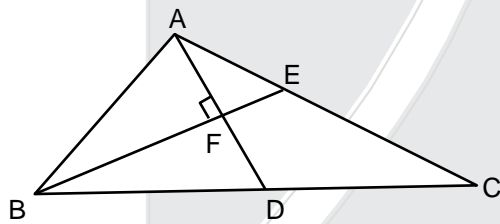
So area of triangle ABC = 3(Area of  $\triangle ABE$ )

$$= 3 \left( \frac{1}{2} \times AF \times BE \right)$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{7}{2} \times 9 = \frac{189}{4} = 47.25$$

Hence nearest integer = 47

Sol.



माना AD और BE बिन्दु F पर मिलते हैं

अब  $\angle ABF = \angle FBD = \frac{B}{2}$  और  $\angle AFB = \angle BFD = 30^\circ$  और BF त्रिभुज ABF और BFD में उभयनिष्ठ है

अतः दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं

इसलिए  $AF = FD = \frac{7}{2}$

तथा,  $AB = BD, \Rightarrow AB : BC = 1 : 2$

$\Rightarrow AE : EC = 1 : 2$

त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल = 3(त्रिभुज  $\triangle ABE$  का क्षेत्रफल)

$$= 3 \left( \frac{1}{2} \times AF \times BE \right)$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{7}{2} \times 9 = \frac{189}{4} = 47.25$$

अतः निकटतम पूर्णांक = 47

## Resonance Eduventures Limited

REGISTERED & CORPORATE OFFICE: CG Tower, A-46 & 52, IPIA, Near City Mall, Jhalawar Road, Kota (Raj.)-324005

Ph.No. : 0744-2777777, 0744-2777700 | Toll Free : 1800 258 5555 | FAX No. : +91-022-39167222 | To Know more : sms RESO at 56677

Website : [www.resonance.ac.in](http://www.resonance.ac.in) | E-mail : [contact@resonance.ac.in](mailto:contact@resonance.ac.in) | CIN : U80302RJ2007PLC024029

Toll Free : 1800 258 5555 73400 10333

[facebook.com/ResonanceEdu](https://facebook.com/ResonanceEdu)

[twitter.com/ResonanceEdu](https://twitter.com/ResonanceEdu)

[www.youtube.com/resowatch](https://www.youtube.com/resowatch)

[blog.resonance.ac.in](http://blog.resonance.ac.in)

30. Let E denote the set of all natural numbers n such that  $3 < n < 100$  and the set  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  can be partitioned into 3 subsets with equal sums. Find the number of elements of E.

मान लो कि E ऐसी प्राकृतिक संख्याओं n का समुच्चय है जिनके लिए  $3 < n < 100$  और जिनके लिए समुच्चय  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  को ऐसे तीन उपसमुच्चयों में विभाजित किया जा सकता है जिनका योग बराबर है। E के सदस्यों की संख्या ज्ञात करो।

Ans (64)

Sol.  $\{1, 2, \dots, n\}$

This set can be partitioned into 3 subsets with equal sums so total sum is divisible by 3 ,

$\frac{n(n+1)}{2}$  is divisible by 3.

So n will be of the form  $3\lambda, 3\lambda + 2$

or for convenience we can take  $n = 6\lambda, 6\lambda + 2, 6\lambda + 3, 6\lambda + 5$

If  $n = 6\lambda$  then we can group numbers in bundles of 6.

In each bundle we can select numbers like 1, 2, 3, 4, 5, 6 (16, 25, 34)

If  $n = 6\lambda + 2$  then we can club last bundle of 8 numbers rest can be partitioned and those 8 numbers can be done 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (1236, 48)

If  $n = 6\lambda + 3$ , we can club last nine numbers and rest can be partitioned 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (12345, 69, 78)

If  $n = 6\lambda + 5$  we can take last five numbers. Rest can be partitioned 1, 2, 3, 4, 5 (14, 23, 5)

Hence we can select any number of form  $6\lambda(16), 6\lambda + 2(16), 6\lambda + 3(16), 6\lambda + 5(16)$

so total 64 numbers.

Sol.  $\{1, 2, \dots, n\}$

इस समुच्चय को 3 उपसमुच्चय में विभाजित किया जाता है जो योगफल में बराबर है इसलिए कुल योगफल 3 से विभाजित है

$\frac{n(n+1)}{2}$ , 3 से विभाजित है.

इसलिए n का रूप  $3\lambda, 3\lambda + 2$  का होगा

या सुविधा के लिए हम  $n = 6\lambda, 6\lambda + 2, 6\lambda + 3, 6\lambda + 5$  ले सकते हैं

यदि  $n = 6\lambda$  तब इन संख्याओं को 6 समूह में लिख सकते हैं

प्रत्येक बंडल में चुनी गई संख्याएँ लिख सकते हैं 1, 2, 3, 4, 5, 6 (16, 25, 34)

यदि  $n = 6\lambda + 2$  तब इन 8 संख्याओं के अन्य भागों में विभाजित किया जा सकता है। तथा वे 8 संख्याएँ निम्न तरह कि हो सकती है 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (1236, 48)

यदि  $n = 6\lambda + 3$ , हम अन्तिम 9 संख्याओं को एक साथ रख सकते हैं तथा शेष संख्याओं को विभाजित कर सकते हैं 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

(12345, 69, 78)

यदि  $n = 6\lambda + 5$  हम अन्तिम 5 संख्याएँ ले सकते हैं और शेष संख्याओं को विभाजित कर सकते हैं 1, 2, 3, 4, 5 (14, 23, 5)

अतः हम  $6\lambda(16), 6\lambda + 2(16), 6\lambda + 3(16), 6\lambda + 5(16)$  के रूप की किसी भी संख्या को ले सकते हैं इसलिए कुल 64 संख्याएँ हैं।

## Resonance Eduventures Limited

REGISTERED & CORPORATE OFFICE: CG Tower, A-46 & 52, IPIA, Near City Mall, Jhalawar Road, Kota (Raj.)-324005

Ph.No. : 0744-2777777, 0744-2777700 | Toll Free : 1800 258 5555 | FAX No. : +91-022-39167222 | To Know more : sms RESO at 56677

Website : [www.resonance.ac.in](http://www.resonance.ac.in) | E-mail : [contact@resonance.ac.in](mailto:contact@resonance.ac.in) | CIN : U80302RJ2007PLC024029

Toll Free : 1800 258 5555

73400 10333

[facebook.com/ResonanceEdu](https://www.facebook.com/ResonanceEdu)

[twitter.com/ResonanceEdu](https://twitter.com/ResonanceEdu)

[www.youtube.com/resowatch](https://www.youtube.com/resowatch)

[blog.resonance.ac.in](http://blog.resonance.ac.in)

**EARLY** TO  
**RESONANCE,**  
**EARLY** TO  
**SUCCESS.**



**Enroll Now for  
Academic Session 2020-21  
at Coaching Fee of 2019-20**

**ADMISSION OPEN**  
**Class: V to XII**  
**Target: JEE (Main+Advanced)**  
**JEE (Main) | AIIMS/ NEET**

**Test Dates:**  
**25<sup>th</sup> August | 8<sup>th</sup> & 22<sup>nd</sup> September 2019**

**Resonance Eduventures Limited**

Registered & Corporate Office: CG Tower, A-46 & 52, IPIA, Near City Mall, Jhalawar Road, Kota (Rajasthan) - 324005

Tel. No.: 0744-2777777, 2777700 | CIN: U80302RJ2007PLC024029