Resonance®
Educating for better tomorrow

RMO 2018

NATIONAL BOARD FOR HIGHER MATHEMATICS
AND
HOMI BHABHA CENTRE FOR SCIENCE EDUCATION
TATA INSTITUTE OF FUNDAMENTAL RESEARCH

REGIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD, 2018

TEST PAPER WITH SOLUTION & ANSWER KEY

Date: 07th October, 2018 | Duration: 3 Hours

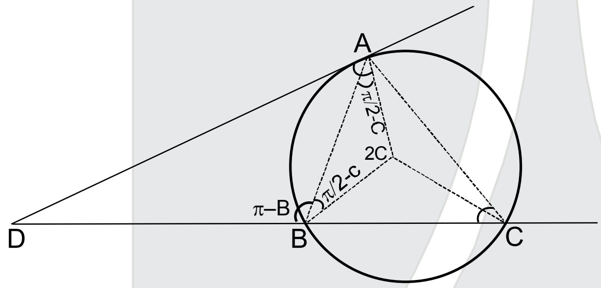
- There are 6 questions in this question paper. All questions carry equal marks. Maximum marks 102.
- Answer all questions.
- Time allotted: 3 hours.

1. Let ABC be a triangle with integer sides in which AB < AC. Let the tangent to the circumcircle of triangle ABC at A intersect the line BC at D. Suppose AD is also an integer. Prove that gcd(AB,AC)>1

मान लो कि एक त्रिभुज है जिसकी हर भुजा की लम्बाई पूर्णांक है, व AB < AC है। त्रिभुज ABC के परिवृत की बिन्दु पर खींची गई स्पर्श–रेखा, BC से D पर मिलती है। मान लो कि AD भी एक पूर्णांक है। साबित करो कि म.स.(AB, AC) > 1 (म.स. = महत्तम समापवर्तक greatest common divisor यानी gcd या)

Sol. $\angle ADC = B - C$

In ΔABD



$$\frac{DB}{\sin C} = \frac{c}{\sin(B-C)}$$

$$DB = \frac{c\sin C}{\sin(B-C)}$$

$$= \frac{c^2}{b\cos C - c\cos B}$$ Apply cosine law

$$= \frac{c^2 a}{b^2 - c^2}$$

$DA^2 = DB \times DC$

$$DA^2 = \frac{c^2 a}{b^2-c^2} \times \left(\frac{c^2 a}{b^2-c^2} + a\right)$$

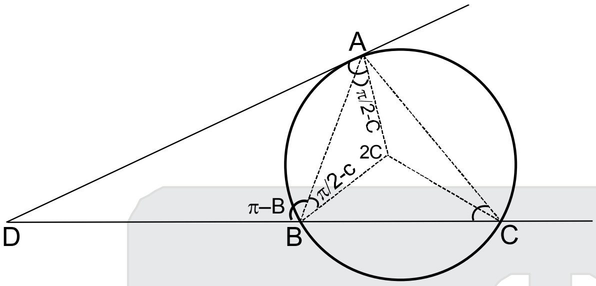
$$DA = \frac{abc}{b^2-c^2}$$

Assume b & c are coprime then $\dfrac{abc}{(b-c)(b+c)} \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ b – c & b + c both should be divisible by a

which is not possible as b + c > a have b & c can't be coprime.

Hindi : $\angle ADC = B - C$

In ΔABD



$$\frac{DB}{\sin C} = \frac{c}{\sin(B-C)}$$

$$DB = \frac{c \sin c}{\sin(B-C)}$$

$$= \frac{c^2}{b\cos C - c\cos B}$$ कोज्या नियम से

$$= \frac{c^2 a}{b^2 - c^2}$$

$DA^2 = DB \times DC$

$$DA^2 = \frac{c^2 a}{b^2 - c^2} \times \left(\frac{c^2 a}{b^2 - c^2} + a\right)$$

$$DA = \frac{abc}{b^2 - c^2}$$

मानाकि b एवं c सहअभाज्य संख्यायें हैं तब $\frac{abc}{(b-c)(b+c)} \in Z \Rightarrow b - c$ और $b + c$ दोनों a से विभाजित होने चाहिये जो कि संभव नहीं है क्योंकि $b + c > a$ b तथा c सहअभाज्य संख्यायें नही हो सकती।

2. Let n be a natural number. Find all real numbers x satisfying the equation
मान लो कि n एक प्राकृतिक संख्या है। ऐसी सभी वास्तविक संख्याएँ x ज्ञात करो जो कि निम्न समीकरण को संतुष्ट करती हो :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{kx^k}{1+x^{2k}} = \frac{n(n+1)}{4}$$

Sol. Let x > 0

Then $\frac{kx^k}{1+x^{2k}} = \frac{k}{x^k + x^{-k}} \le \frac{k}{2}$

Hence $\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{kx^k}{1+x^{2x}}\right| \le \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2} = \frac{n(n+1)}{4}$ = R.H.S of given equation

Hence $\frac{kx^k}{1+x^{2k}} = \frac{k}{2}$ $\forall$ K$\in$ {1, 2, ……, n} ,i.e. equality must hold for every term of this summation

So $x^k = 1$ $\forall$ K$\in$ {1, 2, ……, n} $\Rightarrow$ x=1

Obviously x=0 is not a solution and for x <0

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{kx^k}{1+x^{2x}}\right| \le \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{kx^k}{1+x^{x}}\right| \le \frac{n(n+1)}{4}$$

Inequality holds as all terms of the summation are not of the same sign for k > 1 & for k = 1, LHS is negative. Hence only solution is x = 1.

Hindi : मानाकि x > 0

तब $\frac{kx^k}{1+x^{2k}} = \frac{k}{x^k + x^{-k}} \le \frac{k}{2}$

अतः $\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{kx^k}{1+x^{2x}}\right| \le \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2} = \frac{n(n+1)}{4}$ = दिया गया समीकरण का R.H.S

अतः $\frac{kx^k}{1+x^{2k}} = \frac{k}{2}$ $\forall$ K$\in$ {1, 2, ……, n} , अर्थात् योगफल के लिए प्रत्येक पद असमिका को संतुष्ट करता है ।

इसलिए $x^k = 1$ $\forall$ K$\in$ {1, 2, ……, n} $\Rightarrow$ x=1

स्पष्टतया x=0 हल नहीं है क्योंकि x <0

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{kx^k}{1+x^{2x}}\right| \le \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{kx^k}{1+x^{x}}\right| \le \frac{n(n+1)}{4}$$

असमिका योगफल के सभी पदों को संतुष्ट करती है क्योंकि k > 1 के लिए योगफल का समान चिन्ह नहीं है अतः k = 1 के लिए, LHS ऋणात्मक है। अतः केवल x = 1 हल है।

3. For a rational number r, its period is the length of the smallest repeating block in its decimal expansion. For example, the number r = 0.123123123… has period 3. If S denotes the set of all rational number r of the form r = $0.\overline{abcdefgh}$ having period 8, find the sum of all the elements of S.

एक परिमेय संख्या के r लिए उसका पीरिअड (period) उसके दशमलव विस्तार में दोहराने वाले सबसे छोटे खण्ड की लम्बाई होती है। उदाहरण के तौर संख्या r = 0.123123123…. का पीरिअड (period) 3 है। अगर S उन सभी परिमेय संख्याओं का r समूह है जिनको पीरिअड (period) 8 की संख्या की r = 0. $\overline{abcdefgh}$ तरह लिख सकते है, तो समूह S के सभी सदस्यों का योग ज्ञात करो।

Sol. X = 0.abcdefghabcdefgh……………..

$\Rightarrow x = \dfrac{abcdefgh}{10^8 - 1}$

Total Sum = $\dfrac{1+2+3+.......+\underbrace{99.....99}_{8\text{times}}}{10^8-1} = \dfrac{(10^8-1)10^8}{2(10^8-1)}$ = 5 × 10^7

Period 4 $\Rightarrow$ $\boxed{\_\ \_\ \_\ \_}\ \boxed{\_\ \_\ \_\ \_}$

If unit digit is 1 then the next three places can be filled in 10^3 ways hence sum of all the digits at unit places = $\dfrac{(1+2+3.....+9)10^3}{10^8-1} = \dfrac{45\times10^3}{10^8-1}$

Hence sum of all such numbers = $\dfrac{(1+10+.........+10^7)(45\times10^3)}{10^8-1}$ = 5 × 10^3

It also include numbers with period 1 and period 2

So sum of the numbers with period 8 = Total – Sum of the numbers with period 1, 2, 4

= 5 × 10^7 – 5 × 10^3 = 49995000

Hindi : X = 0.abcdefghabcdefgh……………..

$\Rightarrow x = \dfrac{abcdefgh}{10^8 - 1}$

कुल योग = $\dfrac{1+2+3+.......+\underbrace{99.....99}_{8\text{times}}}{10^8-1} = \dfrac{(10^8-1)10^8}{2(10^8-1)}$ = 5 × 10^7

आवर्त 4 $\Rightarrow$ $\boxed{\_\ \_\ \_\ \_}\ \boxed{\_\ \_\ \_\ \_}$

यदि इकाई अंक 1 है तब अगले तीन स्थानों को 10^3 तरीकों से भरा जा सकता है। अतः इकाई स्थान पर सभी अंकों का योगफल = $\dfrac{(1+2+3.....+9)10^3}{10^8-1} = \dfrac{45\times10^3}{10^8-1}$

अतः इस प्रकार के सभी संख्याओं का योगफल = $\dfrac{(1+10+.........+10^7)(45\times10^3)}{10^8-1}$ = 5 × 10^3

इसमें आवर्त 1 और आवर्त 2 भी शामिल हैं।

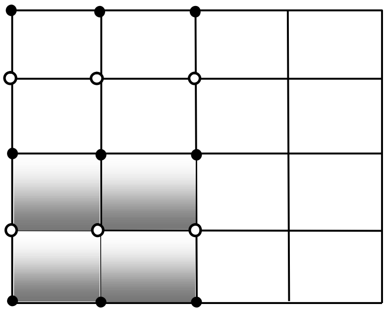
इसलिए आवर्त 8 की संख्याओं का योगफल = कुल – आवर्त 1, 2, 4 की संख्याओं का योगफल

= 5 × 10^7 – 5 × 10^3 = 49995000

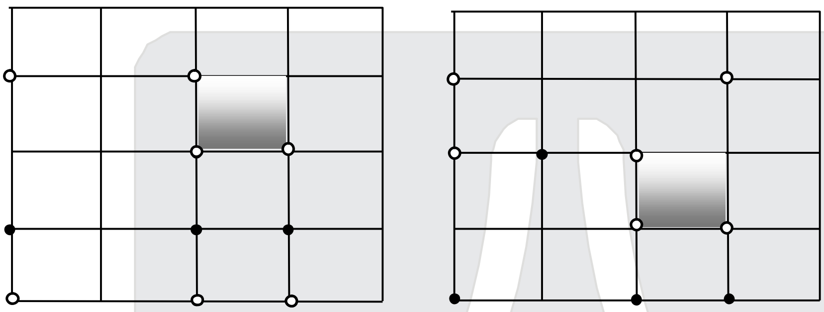
4. Let E denote the set of 25 points (m,n) in the xy-plane, where m,n are natural numbers, $1 \le m \le 5$, $1 \le n \le 5$. Suppose the points of E are arbitrarily coloured using two colours, red and blue. Show that there always exist four points in the set E of the form (a,b), (a + k,b), (a + k,b + k), (a,b + k) for some positive integer k such that at least three of these four points have the same colour. (That is, there always exist four points in the set E which form the vertices of a square with sides parallel to axes and having at least three points of the same colour.)

E को xy तल के ऐसे 25 बिंदुओं (m, n) का समूह मान लो, जहाँ m, n प्राकृतिक संख्याएँ हैं $1 \le m \le 5$, $1 \le n \le 5$ है। मान लो कि समूह E की हर एक बिंदु को लाल या नीले, दोनों में से एक रंग में, मनमाने ढंग से रंग दिया जाता है। साबित करो कि समूह E में चार बिंदु ऐसे है जो कि (a,b), (a + k, b), (a + k, b + k), (a, b + k) जहाँ k एक पूर्णाक है– की तरह लिखे जा सकते है, और जिसमें से कम से कम तीन बिंदु एक ही रंग के है। (माने, समूह E में ऐसे चार बिंदु हमेशा होंगे जो कि एक ऐसे वर्ग के कोने है जिसकी भुजाएँ अक्षो के समानांतर है, व जिनमें कम से कम तीन बिंदु एक ही रंग के हैं)

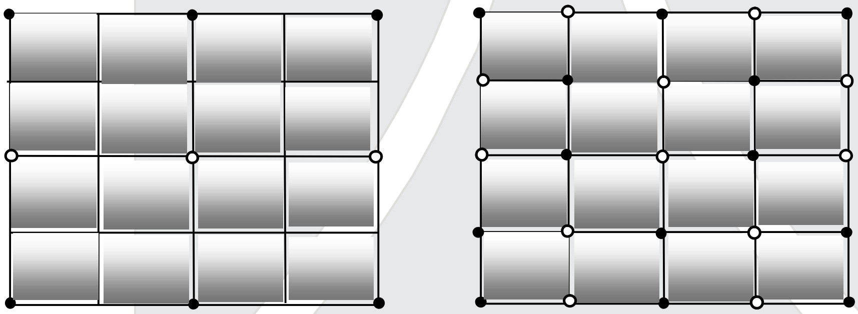
Sol.



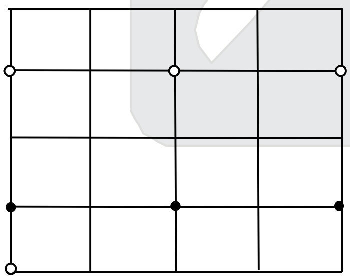
All three colours are consecutive in R4 and R5 due to dark portion reject



All three colours are gap 2 and gap 1 in R4 and R5 due to dark portion reject



All three colours are gap 2 in R4 and R5 due to dark portion reject



All three colours are gap 2 in R4 due to dark portion reject

5. Find all natural number n such that $1 + \left[\sqrt{2n}\right]$ divides 2n. (For any real number x, [x] denotes the largest integer not exceeding x.)

ऐसे सभी प्राकृतिक संख्याएँ n ज्ञात करो जिनके लिए संख्या $1+\left[\sqrt{2n}\right]$ संख्या २n को विभाजित करती है। (किसी भी वास्तविक संख्या x के लिए [x] से हमारा मतलब उसके महत्तम पूर्णांक से ह, माने ऐसे सबसे बड़े पूर्णांक से जो कि x से बड़ा न हो)

Sol. Let $\dfrac{2n}{1+\left[\sqrt{2n}\right]} = p$ (where $p \in N$) $\Rightarrow 2n = p + \left[\sqrt{2n}\right]p \quad \Rightarrow 2n - p = \left[\sqrt{2n}\right]p$ ......(1)

Now $\sqrt{2n} - 1 < \left[\sqrt{2n}\right] \le \sqrt{2n} \quad \Rightarrow p(\sqrt{2n} - 1) < p\left[\sqrt{2n}\right] \le p\sqrt{2n}$ ......(2)

From (1) and (2) $\quad \Rightarrow p(\sqrt{2n} - 1) < 2n - p \le p\sqrt{2n}$

$\Rightarrow 2n - p > p\sqrt{2n} - p$ & $2n - p \le p\sqrt{2n}$

$\Rightarrow 2n > p\sqrt{2n}$ and $2n - p\sqrt{2n} \le p$

$\Rightarrow \sqrt{2n} > p$ & $(\sqrt{2n})^2 - 2.\frac{p}{2}\sqrt{2n} + \frac{p^2}{4} \le p + \frac{p^2}{4}$

$\Rightarrow \sqrt{2n} > p$ & $\left(\sqrt{2n} - \frac{p}{2}\right)^2 \le \frac{p^2+4p}{4} < \frac{(p+2)^2}{4}$

$\Rightarrow \sqrt{2n} > p$ & $\sqrt{2n} - \frac{p}{2} < \frac{p+2}{2}$ $\Rightarrow \sqrt{2n} > p$ & $\sqrt{2n} < \frac{2p+2}{2}$

$p < \sqrt{2n} < p + 1$ $\Rightarrow [\sqrt{2n}] = p$

Now $2n = p + (p)p$ $\Rightarrow n = \frac{p^2+p}{2}$ .....(3)

Now every solution of equation (3) will be the answer became here

$2n = p(p+1)$ and $1+\left[\sqrt{2n}\right] = p + 1$ which divided $p(p+1) = 2n$

Hindi. माना $\frac{2n}{1+\left[\sqrt{2n}\right]} = p$ (जहाँ $p \in N$) $\Rightarrow 2n = p + \left[\sqrt{2n}\right]p$ $\Rightarrow 2n - p = \left[\sqrt{2n}\right]p$ ......(1)

अब $\sqrt{2n} - 1 < \left[\sqrt{2n}\right] \le \sqrt{2n}$ $\Rightarrow p(\sqrt{2n} - 1) < p\left[\sqrt{2n}\right] \le p\sqrt{2n}$ ......(2)

1) और (2) से $\Rightarrow p(\sqrt{2n} - 1) < 2n - p \le p\sqrt{2n}$

$\Rightarrow 2n - p > p\sqrt{2n} - p$ & $2n - p \le p\sqrt{2n}$ $\Rightarrow 2n > p\sqrt{2n}$ और $2n - p\sqrt{2n} \le p$

$\Rightarrow \sqrt{2n} > p$ & $(\sqrt{2n})^2 - 2.\frac{p}{2}\sqrt{2n} + \frac{p^2}{4} \le p + \frac{p^2}{4}$

$\Rightarrow \sqrt{2n} > p$ & $\left(\sqrt{2n} - \frac{p}{2}\right)^2 \le \frac{p^2+4p}{4} < \frac{(p+2)^2}{4}$

$\Rightarrow \sqrt{2n} > p$ & $\sqrt{2n} - \frac{p}{2} < \frac{p+2}{2}$ $\Rightarrow \sqrt{2n} > p$ & $\sqrt{2n} < \frac{2p+2}{2}$

$p < \sqrt{2n} < p + 1$ $\Rightarrow [\sqrt{2n}] = p$

अब $2n = p + (p)p$ $\Rightarrow n = \frac{p^2+p}{2}$ .....(3)

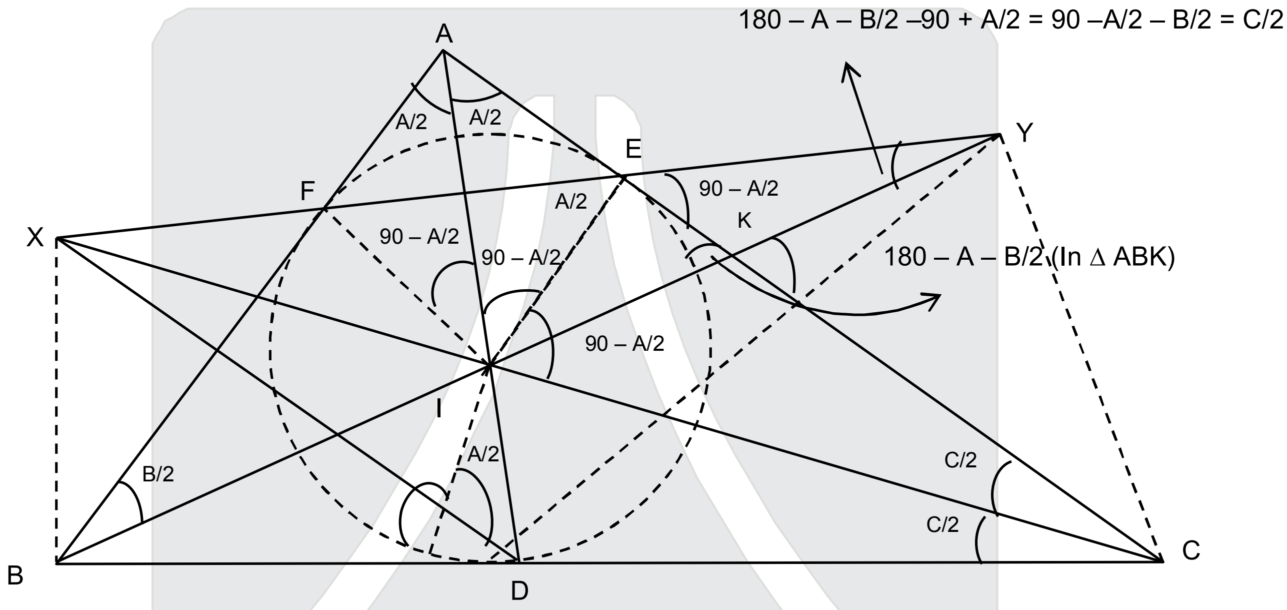
समीकरण (3) का प्रत्येक हल उत्तर होगा $2n = p(p+1)$ और $1+\left[\sqrt{2n}\right] = p + 1$ जो $p(p+1)$ से विभाजित होगा

$= 2n$

6. Let ABC be an acute-angled triangle with AB < AC. Let I be the incentre of triangle ABC, and let D, E, F be the points at which its incircle touches the sides BC, CA, AB, respectively. Let BI, CI meet the line EF at Y, X, respectively. Further assume that both X and Y are outside the triangle ABC. Prove that
(i) B, C, Y, X are concyclic; and
(ii) I is also the incentre of triangle DYX.

मान लो कि ABC एक न्यून कोण त्रिभुज है व AB < AC मान लो कि I त्रिभुज ABC का अंतःकेन्द्र है व D, E, F वह बिंदु है जिन पर अंतः वृत्त क्रमशः BC, CA, AB को स्पर्श करता है। मान लो कि BI, CI रेखा EF से क्रमशः बिंदु पर Y, X मिलते है। और मान लो कि बिंदु X,Y त्रिभुज ABC के बाहर हैं। सिद्ध करो कि:
(i) बिंदु B, C, Y, X एक वृत्तीय हैं; व
(ii) बिंदु I त्रिभुज DY X का भी अंतःकेन्द्र है।

Sol.



Construction : Join XB, Join XD, Join DY. Let IY intersect AL at k. Let AI cuts EF at L

Proof : In ΔAIE, $\angle IAE = A/2$, $\angle AEI = 90°$ $\Rightarrow \angle AIE = 90° – A/2$

In ΔILE, $\angle ILE = 90°$, $\angle LIE = 90° – 90° – A/2$ $\Rightarrow \angle LEI = A/2$

Now $\angle KEY = 180° – \angle IEK – \angle LEI = 180° – 90° – \frac{A}{2}$ ....(1)

In ΔABK, $\angle AKB = 180° – \angle BAK – \angle ABK = 180° – A – \frac{B}{2}$ .....(2)

Now ΔEKY, $\angle EKI$ is interior angle of $\angle EKY$, so $\angle EKI = \angle KEY + \angle KYE$

$\Rightarrow \angle KYE = 180° – A – \frac{B}{2} – (90 – \frac{A}{2}) = 90° – \frac{A}{2} – \frac{B}{2} = \frac{C}{2}$

Now $\angle EYI = \angle ECI = \frac{C}{2}$ $\Rightarrow$ Point EYCI is concyclic .....(3)

Now point ECDI are also concyclic
$\{\therefore \angle IEC = \angle IDC = 90°\}$ .....(4)
From (3) and (4) DIEYC are concyclic

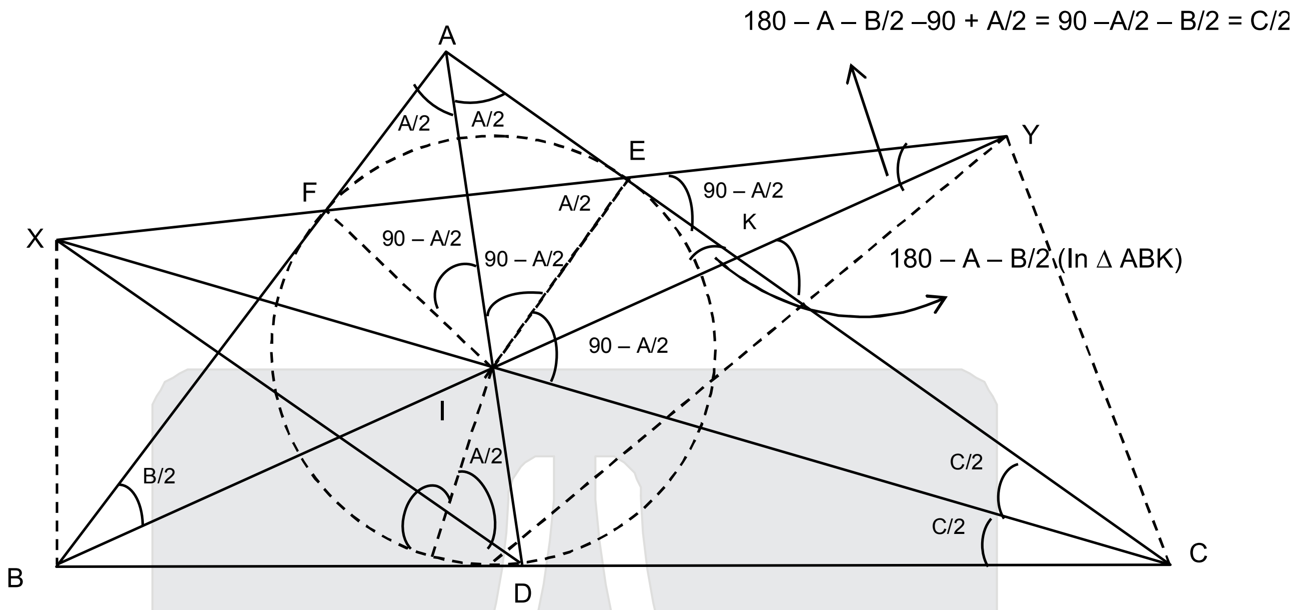
Now on circumcircle of DIEYG, DI is chord so $\angle IYD = \angle ICD = \frac{C}{2}$

$\Rightarrow \angle$ In ΔDXY $\Rightarrow$ YI is $\angle$ bisector of LXYD $\{\angle XYI = \frac{C}{2} = \angle IYD\}$

Similarly XI is angle bisector of DXY $\Rightarrow$ I is in centre of ΔDXY

Now $\angle XYB = \angle XCB = \frac{C}{2}$ $\Rightarrow$ Point XYCB are concyclic

Hindi.



रचना : XB को मिलाया, XD को मिलाया, DY को मिलाया. माना IY, ALको k पर प्रतिच्छेद करता है माना AI ,EF को Lपर प्रतिच्छेद करता है।

Proof : ΔAIE में, $\angle$ IAE = A/2, $\angle$AEI = 90° $\Rightarrow \angle$ AIE = 90° – A/2

IΔILE में, $\angle$ILE = 90°, $\angle$LIE = 90° – 90° – A/2 $\Rightarrow \angle$LEI = A/2

अब $\angle$ KEY = 180° – $\angle$IEK – $\angle$LEI = 180° – 90° – $\frac{A}{2}$ ….(1)

ΔABK में, $\angle$AKB = 180° – $\angle$BAK – $\angle$ABK = 180° – A – $\frac{B}{2}$ …..(2)

अब ΔEKY, $\angle$EKI, $\angle$ EKY का आंतरिक कोण है, इसलिए $\angle$EKI = $\angle$KEY + $\angle$KYE

$\Rightarrow \angle KYE = 180° - A - \frac{B}{2} - (90 - \frac{A}{2}) = 90° - \frac{A}{2} - \frac{B}{2} = \frac{C}{2}$

अब $\angle$EYI = $\angle$ECI = $\frac{C}{2}$ $\Rightarrow$ बिंदु EYCI सम चक्रीय है। …..(3)

अब बिंदु ECDI सम चक्रीय है।

{ $\therefore$ $\angle$IEC = $\angle$IDC = 90°} …..(4)

(3) और (4) से DIEYC सम चक्रीय है।

अब DIEYG के परिगत वृत्त पर , DI जीवा है। इसलिए $\angle$IYD = $\angle$ICD = $\frac{C}{2}$

$\Rightarrow \angle$ ΔDXY में $\Rightarrow$ YI , LXYD का कोण अर्द्धक है {$\angle XYI = \frac{C}{2} = \angle IYD$}

इसी प्रकार XI, DXY का कोण अर्द्धक है $\Rightarrow$ I, ΔDXY का अंतःकेन्द्र है

अब $\angle$XYB = $\angle$XCB = $\frac{C}{2}$ $\Rightarrow$ बिंदु XYCB सम चक्रीय है।